



Material Didático do Curso de Engenharia Mecânica da UniEVANGÉLICA

Disciplina: Física III - Eletromagnetismo

Docente(s): Carlos Eduardo Fernandes

Jorge Manoel Almacinha Costa

Cláudia Gomes de Oliveira Santos

Ricardo Wobeto

Volume 01, 2018

UniEVANGÉLICA
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Centro Universitario de Anápolis - UniEVANGÉLICA

Associação Educativa Evangélica

Conselho de Administração

Presidente – Ernei de oliveira Pina

1º Vice-Presidente – Cicílio Alves de Moraes

2º Vice-Presidente – Ivan Gonçalves da Rocha

1º Secretário – Geraldo Henrique Ferreira Espíndola

2º Secretário – Francisco Barbosa de Alencar

1º Tesoureiro – Augusto César da Rocha Ventura

2º Tesoureiro – Djalma Maciel Lima

Centro Universitário de Anápolis

Chanceler – Ernei de Oliveira Pina

Reitor – Carlos Hassel Mendes da Silva

Pró-Reitor Acadêmico - Cristiane Martins Rodrigues Bernardes

Pró-Reitor de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Ação Comunitária - Sandro Dutra e Silva

Coordenadora da Pesquisa e Inovação - Bruno Junior Neves

Coordenador de Extensão e Ação Comunitária - Fábio Fernandes Rodrigues

Equipe Editorial

Diretor - Hélio de Souza Queiroz

Coordenador de Pesquisa – Rosemberg Fortes Nunes Rodrigues

Coordenador Pedagógico - Wilson de Paula e Silva

Coordenador de Planejamento e Inovação - Ricardo Wobeto

Coordenador de Laboratórios e de Atividades de Extensão - Sérgio Mateus Brandão

Coordenador de Estágio Supervisionado - Marcio José Dias

ELETROMAGNETISMO

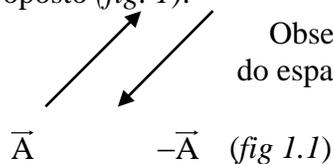
1ª Aula : REVISÃO DE ANÁLISE VETORIAL

- 1_1. Álgebra Vetorial;
 - 1_1.1 Adição de Vetores;
 - 1_1.2 Multiplicação por Escalar;
 - 1_1.3 Produto Escalar;
 - 1_1.4 Produto Vetorial;
- 1_2 Representação Vetorial em Termos de Suas Componentes;
 - 1_2.1 Soma de Dois Vetores
 - 1_2.2 Multiplicação de Um Vetor por Um Vetor Escalar;
 - 1_2.3 Produto Escalar;
 - 1_2.4 Produto Vetorial

1_1 ÁLGEBRA VETORIAL

Até agora já ouvimos falar de dois tipos de grandeza físicas: as grandezas escalares e as grandezas vetoriais. Já sabemos, por exemplo, que a massa, carga elétrica, temperatura e pressão são grandezas escalares, pois é necessário apenas um número (magnitude) além da unidade para caracterizá-las. Por outro lado, para caracterizar uma grandeza vetorial é necessário especificar, além da magnitude, sua direção e seu sentido, como é o caso da velocidade, força, aceleração e deslocamento. Para indicar uma grandeza vetorial vamos usar uma flecha sobre ela: $\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$, etc.

A magnitude de uma grandeza vetorial será indicada pela letra sem a flecha ou entre barras verticais: $v(|\vec{v}|), a(|\vec{a}|)$, etc. Para representar um vetor, também são úteis usar flechas tal que o comprimento da flecha seja proporcional a sua magnitude e a ponta da flecha indique a direção. A grandeza $-\vec{A}$ indique um vetor de mesma magnitude que \vec{A} mas no sentido oposto (*fig. 1*):



Observe que a reta \vec{A} pode ser representado em qualquer lugar do espaço, desde que represente sua direção e sentido.

1_1.1. Adição de Vetores

Dados dois vetores \vec{A}, \vec{B} , sua soma $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ é obtida colocando o “pé” do vetor \vec{B} sobre o vetor de \vec{A} , o vetor \vec{C} é a reta que liga o “pé” de \vec{A} à ponta de \vec{B} . (*fig. 2*)

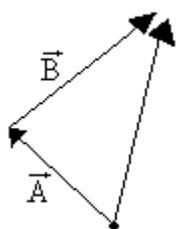
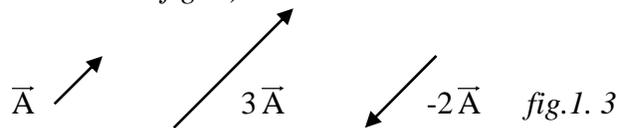


fig. 1.2

- Note que: *i)* $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + \vec{B}$ (comutativa)
ii) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ (associativa)

1_1.2 Multiplicação Por Escalar

Um vetor por multiplicado por um escalar positivo K produz um outro vetor $K\vec{A}$ K vezes maior que \vec{A} e na mesma direção e sentido de \vec{A} ; se K for negativo, o sentido do vetor $\vec{C} = K\vec{A}$ é invertido (fig. 3).



1_1.3 Produto Escalar

Definição: Dados \vec{A}, \vec{B} então $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$ (fig. 4) é o produto escalar entre \vec{A}, \vec{B} sendo θ o (menor) ângulo entre eles.

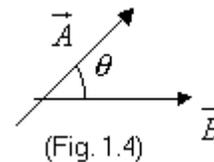
Note que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é um escalar, daí o nome produto escalar

Note também que:

$$i) \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (\text{comutativa})$$

$$ii) \quad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C} \quad (\text{distributiva})$$

Note que $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$ e, portanto, $A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$



EX. 01: Dados \vec{A}, \vec{B} perpendiculares entre si, calcule $|\vec{C}|$, sendo $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

Solução :

$$|\vec{C}| = \sqrt{\vec{C} \cdot \vec{C}} = \sqrt{(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})} = C$$

$$C = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B}}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (\text{Resposta})$$

1_1.4 Produto Vetorial

Definição: Dados \vec{A}, \vec{B} , define-se o produto vetorial entre eles como $\vec{A} \times \vec{B} = AB \text{sen} \theta \vec{n}$, sendo \vec{n} o vetor unitário (magnitude igual a 1) apontando perpendicularmente ao ângulo formado por \vec{A} e \vec{B} (o acento circunflexo “^” sobre o vetor será usado sempre que se tratar de um vetor unitário). Como há duas direções perpendiculares ao plano de \vec{A} e \vec{B} , adota-se a regra da mão direita: com os dedos da mão direita estendidos ao longo do primeiro vetor, gire-os no sentido do segundo vetor (via menor ângulo); o polegar indicará a direção de \vec{n} (na fig. 4 \vec{n} aponta para dentro da página). Note que $\vec{A} \times \vec{B}$ é também um vetor, daí o nome de produto vetorial. É fácil verificar as seguintes propriedades :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} + (\vec{A} \times \vec{C}) \times \vec{B} \quad (\text{distributiva})$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{A} &= 0 \\ \vec{A} \times \vec{B} &= -(\vec{B} \times \vec{A}) \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} &\neq \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \quad (\text{em geral})\end{aligned}$$

1_2. REPRESENTAÇÃO VETORIAL POR MEIO DE SUAS COMPONENTES

Até agora falamos em vetores e de operações vetoriais sem fazer referências a um sistema qualquer de coordenadas. Na prática, é mais fácil estabelecer coordenadas cartesianas (x, y, z) e trabalhar com as componentes dos vetores. Seja $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (ou $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) vetores paralelos ao eixo x, y, z , respectivamente, conforme *fig. 5a* abaixo:

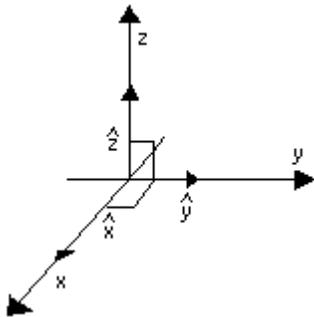


fig.1. 5a

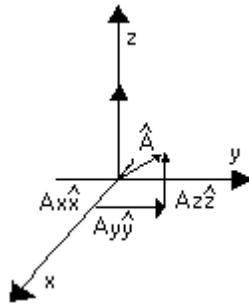


fig. 1.5b

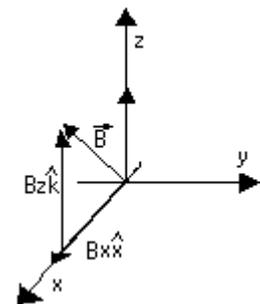


fig. 1.5c

Um vetor arbitrário \vec{A} pode ser escrito como uma combinação dos vetores $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (*fig. 5b*):

$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ ou $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, de modo que as operações podem ser assim reformuladas.

1_2.1 Soma de Vetores

Dados $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ e $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$ a soma $\vec{A} + \vec{B}$ é a soma das componentes, isto é, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$ ou $\vec{C} = (A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$ em que $\vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j} + C_z \hat{k}$, sendo as componentes de \vec{C} :

$$C_x = A_x + B_x ; C_y = A_y + B_y ; C_z = A_z + B_z$$

1_2.2 Multiplicação de Um Vetor Por Um Vetor Escalar

Para multiplicar um vetor por um escalar, multiplique cada componente, isto é, $a\vec{A} = aA_x \hat{x} + aA_y \hat{y} + aA_z \hat{z} = (aA_x, aA_y, aA_z)$.

1_2.3 Produto Escalar

Note que: $x \cdot x = y \cdot y = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$; $x \cdot y = x \cdot \hat{z} = y \cdot \hat{z} = 0$ então,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (Ax\hat{x} + Ay\hat{y} + Az\hat{z}) \cdot (Bx\hat{x} + By\hat{y} + Bz\hat{z})$$

$$= AxBx + AyBy + AzBz$$

isto é, para calcular o produto escalar, multiplique as componentes e adicione-as.

EXEMPLO: Calcule $A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$ se $\vec{A} = Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Bz\hat{k}$.

Solução: $\sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{(Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}) \cdot (Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k})} \quad \therefore$

$$A = \sqrt{A^2x + A^2y + A^2z + A^2z}$$

1_2.4 Produto Vetorial

Notando que :

$$x \times x = y \times y = \hat{z} \times \hat{z}$$

$$x \times y = -(y \times x) = \hat{z}$$

$$y \times \hat{z} = -(\hat{z} \times y) = x$$

$$\hat{z} \times x = -(x \times \hat{z}) = y$$

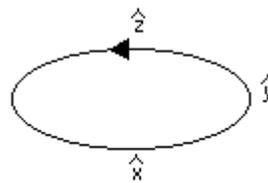


Fig. 1.6

Essas relações que podem ser colocadas da definição de produto vetorial. Note ainda que essas relações podem ser obtidas da regra cíclica (fig. 6) . Então:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}) \times (Bx\hat{i} + By\hat{j} + Bz\hat{k})$$

$$= (AyBz - AzBy)\hat{i} + (AzBx - AxBz)\hat{j} + (AxBy - AyBx)\hat{k} \quad \text{ou seja, se}$$

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, então as componentes de \vec{C} são: $C_x = (AyBz - AzBy)$; $C_y = (AzBx - AxBz)$; $C_z = (AxBy - AyBx)$.

EX. 01: Mostre que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

ELETROMAGNETISMO

2ª Aula: **EXERCÍCIOS (ANÁLISE VETORIAL)**

2_1 Exercícios Resolvidos;

2_2 Exercícios de Fixação;

2_1 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Nesta aula vamos resolver alguns exercícios para melhor fixação do conteúdo ministrado na primeira aula.

EX. 01: Dados $\vec{A} = \hat{i} + 2\vec{j}$; $\vec{B} = 3\hat{i} - 4\vec{j} + k$, encontre:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

b) $\vec{A} \times \vec{B}$

c) $|\vec{A} \times \vec{B}|$

d) A

Solução: a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} + 2\vec{j}) \cdot (3\hat{i} - 4\vec{j} + k) = 3 - 8 = -5$

b)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \vec{j} & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 2\hat{i} + 0 - 4k - 6k - \vec{j}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 2\hat{i} - \vec{j} - 10k \quad (\text{resp.})$$

$$c) |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{4 + 1 + 100} = \sqrt{105} \quad (\text{resp.})$$

$$d) \quad A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j}}{\sqrt{5}} \quad (\text{resp.})$$

EX. 02: Demonstre o teorema de Pitágoras usando vetores.

Solução: O teorema de Pitágoras estabelece que a soma do quadrado de cada cateto é igual ao quadrado da hipotenusa. Da *fig. 1*, abaixo sendo que $\vec{C} = \vec{a} + \vec{b}$,

$$\text{logo: } \vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{ou}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ C^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned} \quad (\text{resp.})$$

EX. 03: Mostre que :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \\ Cx & Cy & Cz \end{vmatrix}$$

$$\text{e que } \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

Solução: Para mostra a primeira parte, faça primeiro o lado esquerdo

$$(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ Bx & By & Bz \\ Cx & Cy & Cz \end{vmatrix} = (ByCz - BzCy)\hat{i} + (BzCx - BxCz)\hat{j} + (BxCy - ByCx)\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (Ax\hat{i} + Ay\hat{j} + Az\hat{k}) \cdot [(ByCz - BzCy)\hat{i} + (BzCx - BxCz)\hat{j} + (BxCy - ByCx)\hat{k}]$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = Ax(ByCz - BzCy) + Ay(BzCx - BxCz) + Az(BxCy - ByCx) \square\square$$

Façamos agora o lado do determinante:

$$\begin{vmatrix} Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \\ Cx & Cy & Cz \end{vmatrix}$$

$$= AxByCz + AyBzCy - CxByAz - CyBzAx - CzBxAy$$

$$= Ax(ByCz - BzCy) + Ay(BzCx - BxCz) + Az(BxCy - ByCx)$$

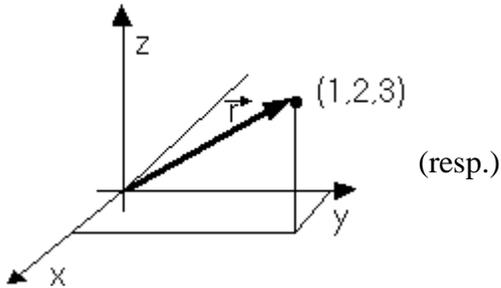
que demonstra a igualdade entre o lado direito e esquerdo do exercício proposto. A demonstração de $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ é feito de maneira análoga, e é deixada como exercícios.

EX. 04: Proceda como exercício anterior, mostre a regra do

$$"BAC - CAB": \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

EX. 05: a) Indique graficamente o vetor que parte da origem e termina no ponto (1,2,3); b) encontre o seu módulo; c) encontre o vetor unitário na sua direção.

Solução: a) Designemos o vetor $(1,2,3)$ por $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$:



(resp.)

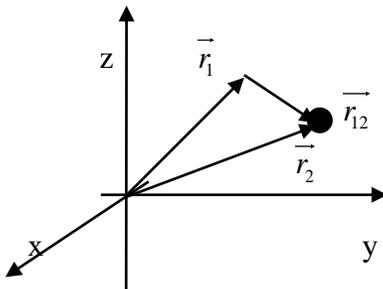
$$b) r = |\vec{r}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \quad (\text{resp.})$$

$$c) \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{14}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{14}} + \frac{\hat{k}}{\sqrt{14}} = \frac{\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{14}} \quad (\text{resp.})$$

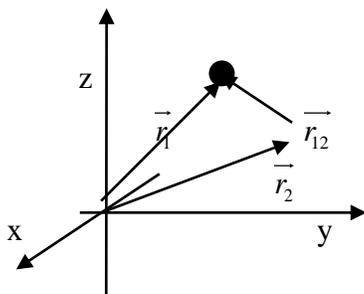
EX. 06 : Sejam dois vetores que partem da origem e ligam os pontos $A(1,2,3)$ e

$B(1,0,-1)$. a) Encontre o vetor que liga \overline{AB} aponta de A para B b) Encontre o vetor unitário na direção AB e que aponta de B para A.

Solução: a) primeiro analisaremos graficamente dois vetores quaisquer :



Note que: $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ é o vetor que liga a \vec{r}_1 e aponta para \vec{r}_2 .



Note agora que : $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ é o vetor que liga \vec{r}_1 a \vec{r}_2 e aponta para \vec{r}_1 .

Chamemos $A(1,2,3) = \vec{r}_A$; $B(1,0,-1) = \vec{r}_B$ então o vetor que liga \overline{BA} e aponta de A para B é :

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (1,0,-1) - (1,2,3) = (0,-2,-4) \quad \text{ou}$$

$$\vec{r}_{AB} = -2\hat{j} - 4\hat{k} \quad (\text{resp.})$$

b) Seja \vec{r}_{BA} o vetor que aponta de B para A. Então $\vec{r}_{BA} - \vec{r}_{AB} = 2j + 4k$, e

$$\vec{r}_{BA} = \frac{2j + 4k}{\sqrt{4 + 16}}$$

$$\therefore \hat{r}_{BA} = \frac{2j + 4k}{\sqrt{20}} \text{ (resp.)}$$

2.2 Exercícios de Fixação

01. Quatro vetores são dados por $\vec{a} = 2\hat{i} + j + k$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3k$, $\vec{c} = 3\hat{i} + 5j - k$ e $\vec{d} = 2k - j$. Calcule:

- o módulo dos vetores $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$ e $|\vec{d}|$
- $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$
- $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
- os vetores unitários nas direções de a e \hat{b}
- o ângulo entre a e \hat{b}

02. Mostre que, em coordenadas cartesianas, $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

03. **Produto escalar triplo.** O escalar $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ é chamado de escalar triplo, e

possui uma interpretação geométrica simples. Mostre $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$ que é igual ao volume do paralelepípedo de lados $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$.

04. Encontre o volume de um paralelepípedo cujo lados são $\vec{a} = \hat{i} + j + k$, $\vec{b} = \hat{i} - j + 3k$ e $\vec{c} = 2\hat{i} + 2j - 2k$.

05. Dois vetores de módulo a e b fazem entre si um ângulo θ . Mostre que o comprimento da soma dos dois vetores é dado por:

$$|\vec{r}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

06. **Trabalho** em Física é definido como sendo o produto da força vezes o deslocamento. Para uma força constante, se a força não é paralela ao deslocamento, então a componente perpendicular ao deslocamento não realiza trabalho. O trabalho é então a componente da força paralela ao deslocamento multiplicada pelo deslocamento, isto é $W = Fd \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Calcule:

- o trabalho W realizado pela força $\vec{F} = 3\hat{i} + 5j - 2k$ N sobre um objeto que é deslocado de $\vec{d} = 5\hat{i} + 2j + k$ metros:

b) o módulo da força $|\vec{F}|$ e do deslocamento $|\vec{d}|$.

07. **Torque** $\vec{\tau}$ (ou momento) de uma força F ao redor de um ponto O é definido como sendo $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, sendo r o vetor de módulo r que liga O ao ponto em que a força é aplicada. Dados $\vec{F} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$, $r = 2\hat{i} + 2\hat{j} - k m$, encontre:

- o torque de \vec{F} ao redor do ponto \vec{r}
- o módulo, a direção e o sentido do torque à força \vec{F} .

08. **Produto vetorial triplo.** O vetor resultante da operação vetorial $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ é chamado de produto vetorial triplo. Desenhe $(\vec{B} \times \vec{C})$ e veja que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ é um vetor no plano formado por \vec{B} e \vec{C} . Use coordenadas cartesianas e mostre a seguinte identidade: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$. Esta é uma fórmula importante, mas não é necessário memorizá-la. Note que $(\vec{B} \times \vec{C}) \times \vec{A} = -(\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} + (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$, isto é, a mudança na ordem no produto vetorial dá origem a um sinal negativo, como já vimos. Aplicações: *O momento angular* \vec{L} de um corpo de massa m e velocidade angular $\vec{\omega}$ ao redor de um ponto O é definido como $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}$, sendo $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Portanto, $\vec{L} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. A aceleração centrípeta é dada por $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Dados: $\vec{\omega} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - k$ e $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$, encontre, para um corpo de massa unitária:

- o momento angular \vec{L} e o seu módulo. Especifique a direção e o sentido de \vec{L} .
- a aceleração angular \vec{a} e o seu módulo. Especifique a direção e o sentido de \vec{a} .

ELETROMAGNETISMO

3ª Aula : REVISÃO DE ÁLGEBRA VETORIAL

- 3_1 Multiplicação de $\vec{\nabla}$;
- 3_2 Multiplicação de $\vec{\nabla}$ Por Um Campo Vetorial;
- 3_2.1 Multiplicação Escalar : Divergente de \vec{A} ;
- 3_2.2 Multiplicação Vetorial: Rotacional de \vec{A} ;
- 3_3 Vetor Laplaciano.

No Eletromagnetismo freqüentemente faremos o uso de diferenciação e integração de vetores. Nesta aula faremos uma breve revisão das operações de derivação de funções escalares e vetoriais, também é chamado de campos escalares e campos vetoriais, respectivamente, que comumente aparecem em eletromagnetismo. Começaremos definindo o operador derivada vetorial ou operador “del”:

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{coordenadas cartesianas})$$

Repare a reta sobre o símbolo ∇ (nabla) para reforçar o caráter vetorial desse operador, cujo componentes são:

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}; \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z} .$$

Como esse operador toma caráter vetorial, podemos fazer com eles operações escalares e vetoriais. Por exemplo, dadas as funções $\phi = \phi(x, y, z)$ e $\vec{A} = \vec{A}_x(x, y, z)$, então a multiplicação deste operador será dada pela soma das derivadas parciais na direção $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$.

3_1 MULTIPLICAÇÃO DE $\vec{\nabla}$ POR UM CAMPO ESCALAR

Multiplicação de $\vec{\nabla}$ pelo campo escalar ϕ : gradiente ϕ , logo:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k} .$$

Nota que escrever " $\phi\vec{\nabla}$ " não tem significado.

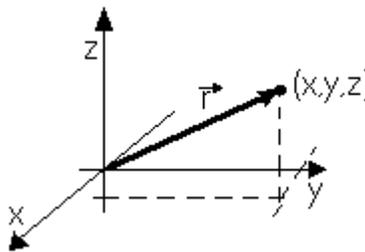
EX. 01: Encontre o gradiente de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solução:
$$\vec{\nabla}r = \frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}r = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{2yk}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2zk}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\vec{\nabla}r = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r}$$

sendo : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$



EX. 02 : Encontre o gradiente de:

a) $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

b) $f(x, y, z) = x^2 e^y \ln z$

3_2 MULTIPLICAÇÃO DE $\vec{\nabla}$ POR UM CAMPO VETORIAL

Multiplicação de $\vec{\nabla}$ por um campo vetorial $\vec{A}(x, y, z)$. Nesse caso, podem multiplicar $\vec{\nabla}$ escalar ou vetorialmente por \vec{A} :

3_2.1 Multiplicação Escalar : Divergente de \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \therefore$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Note que o divergente de um campo escalar não tem significado.

EX. 03: Calcule a divergência do vetor posição \vec{r} .

Solução:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} r_x + \frac{\partial}{\partial y} r_y + \frac{\partial}{\partial z} r_z = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \quad \text{ou}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

EX. 04: Encontre o gradiente e o divergente de \vec{A} e \vec{B} :

i) $\vec{A}(x, y, z) = x^2 \hat{i} + xyz \hat{j} + z^3 \hat{k}$

ii) $\vec{B}(x, y, z) = xy \hat{i} + (xyz - yx^2) \hat{j}$

3_2.2 Multiplicação Vetorial: Rotacional de \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \quad \text{ou} \quad \partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \text{ etc.}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

EX. 05: Calcule o rotacional de $\vec{A} = y \hat{i} - x \hat{j}$:

Solução:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} y \right) \hat{k} = -2 \hat{k}$$

EX. 05: Calcule o rotacional das funções abaixo:

a) $f(x, y) = xy \hat{i} + x^2 y \hat{j}$

b) $f(x, y) = yx^2 \hat{i} - xy^2 \hat{j} - yz^2 \hat{k}$

3_3 VETOR LAPLACIANO

Como $\vec{\nabla}$ é um vetor, podem fazer o escalar por ele mesmo, resultando no Laplaciano:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \equiv \nabla^2 \quad \text{ou}$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

O Laplaciano pode ser aplicado em um escalar ou vetorial, por exemplo:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi \right)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{i} + \nabla^2 A_y \hat{j} + \nabla^2 A_z \hat{k}$$

EX. 06: Dados os campos $\phi = x^2 y z^3$ e $\vec{A} = x^2 y \hat{i} + 2 \hat{j}$, encontre o Laplaciano de ϕ e \vec{A} .

Solução:
$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 y z^3) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 y z^3) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^2 y z^3)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial x} (2 x y z^3) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 z^3) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y 3 z^2)$$

$$\nabla^2 \phi = 2 x z y^2 + 0 + 6 x^2 y z \quad (\text{resp.})$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{i} + \nabla^2 A_y \hat{j} + \nabla^2 A_z \hat{k}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_x \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_y \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z \right) \hat{k}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = 2 y \hat{i} \quad (\text{resp.})$$

EX. 07: Calcule o Laplaciano de:

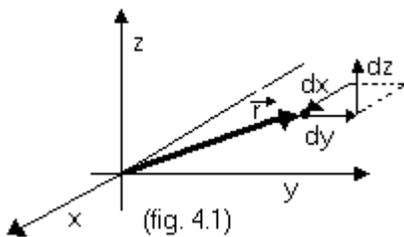
a) $\phi = x^2 + y^2 + z^2$; $\vec{A} = x^2 y \hat{i} + z^3 \hat{j}$

b) $\phi = x^3 y^3 z^3$; $\vec{A} = x^3 \hat{i} + y^3 \hat{j}$

ELETROMAGNETISMO

- 4_1. Coordenadas no Espaço;
- 4_1.1 Direções \hat{i}, j, k ;
- 4_1.2 Elemento de Superfície;
- 4_1.3 Elemento de Volume;
- 4_2 Coordenadas Cilíndricas (ρ, ϕ, z) ;
- 4_2.1 Elemento de Comprimento;
- 4_2.1 Elemento de Superfície;
- 4_2.3 Elemento de Volume;
- 4_3 Coordenadas Esféricas (r, θ, ϕ) ;
- 4_3.1 Elemento de Comprimento;
- 4_3.2 Elemento de área;

Coordenadas cilíndricas e esféricas são bastante úteis para a solução de problemas que envolvem essas simetrias, como, por exemplo, no cálculo de campos elétricos ou magnéticos devido a distribuição de carga sobre superfícies ou volumes cilíndricos ou esféricos. Por isso, é importante saber escrever elementos de caminhos, área e superfície usando diferentes sistemas de coordenadas.



• Vetor posição

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\hat{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

4_1 COODENADAS NO ESPAÇO

4_1.1 Direções \hat{i}, j, k :

Um elemento de caminho no espaço é obtido somando cada elemento nas direções \hat{i}, j, k :

$$d\vec{l} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k}$$

4_1.2 Elemento de Superfície:

Um elemento de superfície dA pode ser obtido do produto de dois elementos de comprimento:

$$dA_x = dydz \quad ; \quad dA_y = dx dz \quad ; \quad dA_z = dx dy \quad .$$

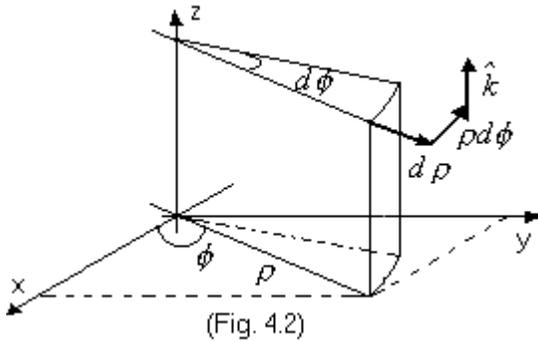
O subscrito i no elemento de área $dA_i (i = x, y, z)$ indica que a área é perpendicular ao eixo coordenada i ; por exemplo, dA_z é uma área perpendicular ao eixo z .

4_1.3 Elemento de Volume:

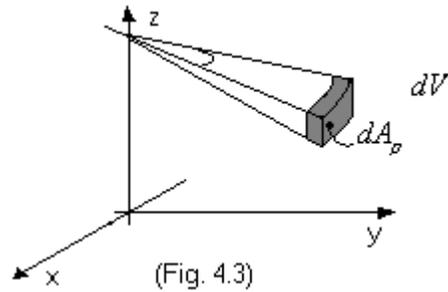
Um elemento de volume é formado multiplicando os três elementos de comprimento:

$$dV = dx dy dz$$

4_2. COORDENADAS CILÍNDRICAS (ρ, ϕ, z)



$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned}$$



4_2.1 Elemento de Comprimento:

Para encontrar um elemento de comprimento $d\vec{e}$ em coordenadas cilíndricas, é preciso encontrar um elemento de comprimento nas direções de crescimento de ρ, ϕ, z . Denominaremos essas direções por ρ, ϕ, \hat{z} , respectivamente. Da figura:

$$d\vec{l} = d_\rho \rho + \rho d_\phi \phi + d_z \hat{k} \quad ; \quad dl_\rho = d\rho \quad ; \quad dl_\phi = \rho d\phi \quad ; \quad dl_z = dz$$

4_2.1 Elemento de Superfície:

Como no caso anterior, um elemento de superfície é formado pelo produto de dois elementos de comprimento:

$$dA_\rho = \rho d\phi dz \quad ; \quad dA_\phi = d\rho dz \quad ; \quad dA_z = \rho d\rho d\phi$$

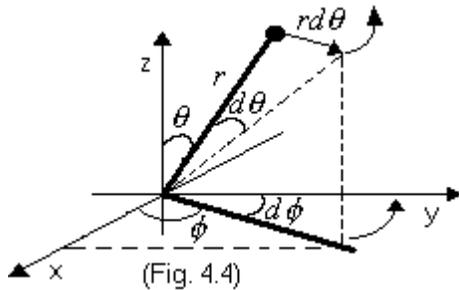
em que, por exemplo, dA_ρ indica a área perpendicular à direção ρ (ver fig4.3). Note que $d\phi$ não é um elemento de comprimento é $\rho d\phi$, que é o comprimento (em metros, centímetros, ect.).

4_2.3 O elemento de volume:

O volume é obtido do produto dos elementos de comprimento:

$$dV = (d\rho)(\rho d\phi)(dz) = \rho d\rho d\phi dz$$

4_3 COORDENADAS ESFÉRICAS (r, θ, ϕ)



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

4_3.1 Elemento de Comprimento (r, θ, ϕ) :

Denotado por $\hat{r}, \hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$ os vetores unitários nas direções r, θ e ϕ , respectivamente, teremos:

$$dl_r = dr \quad ; \quad dl_\theta = r d\theta \quad ; \quad dl_\phi = r \sin \theta d\phi$$

e portanto: $d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$

4_3.2 Elemento de área (r, θ, ϕ) :

$$dA_r = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad ; \quad dA_\theta = r \sin \theta dr d\phi \quad ; \quad dA_\phi = r dr d\theta$$

Ex.: Mostre que elemento de volume de uma esfera de raio R é $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Solução:

$$V = \int_V dV = \int_r^R \int_\theta^\pi \int_\phi^{2\pi} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^R \right) \left(-\cos \theta \Big|_0^\pi \right) \left(\phi \Big|_0^{2\pi} \right)$$

$$V = -\frac{R^3}{3} (\cos \pi - \cos 0)(2\pi) = -\frac{R^3}{3} (2\pi)(-1-1)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{resp.})$$

ELETROMAGNETISMO

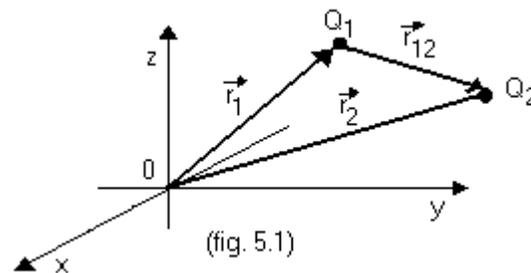
5ª Aula: **ELETRÓSTÁTICA**

- 5_1 Lei de Coulomb;
- 5_2 Campo elétrico;
- 5_2.1 Campo devido a N cargas pontuais;
- 5_3 Campo elétrico de distribuições contínuas de carga.

5_1 LEI DE COULOMB

A lei de Coulomb é eminentemente experimental. Ela descreve a força de natureza elétrica entre duas cargas estáticas Q_1 e Q_2 :

$$\vec{F}_{12} = K_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$



Em que $r_{12} = \frac{\vec{r}}{r}$; $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$;

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm}$$

Em palavras, a lei de Coulomb estabelece que a força elétrica entre duas cargas é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Além disso, a força é dirigida ao longo da linha que une as cargas e é repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal e atrativa se forem de sinal contrário. A menor unidade de carga elétrica é igual à carga de um elétron que vale $1,6 \cdot 10^{-19} C$. Portanto, seriam necessárias cerca de 10^{18} elétrons para se ter 1 Coulomb (C).

Note que o sinal de Q_1 e Q_2 é fundamental para definir o sentido da força. Por exemplo, se $Q_1 = -2C$ e $Q_2 = 2C$ na figura 5.1, então o sentido da força em Q_1 é $-\vec{r}_{12}$, enquanto que o sentido da força em Q_2 é \vec{r}_{12} .

5_2 CAMPO ELÉTRICO

Definição: Suponha que uma carga Q esteja fixo e que levemos uma outra carga q chamada “carga de teste”, para diversos pontos ao redor de Q , em cada ponto, meçamos a força experimentada pela carga q . Esse procedimento evidenciará que existe um campo de forças (campo vetorial) portanto ao redor de Q .

Assim, pela lei de Coulomb, temos :

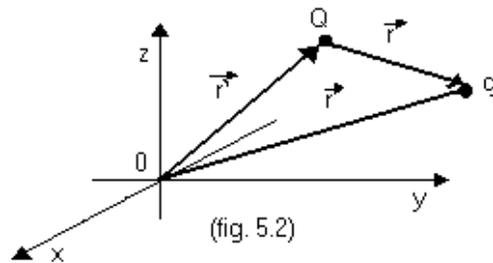
$$\vec{F} = K \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$

em que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ (ver fig 5.2) .

Define-se campo elétrico \vec{E} em torno

$$\frac{\vec{F}}{q} \equiv \vec{E} = \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = K \frac{Q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

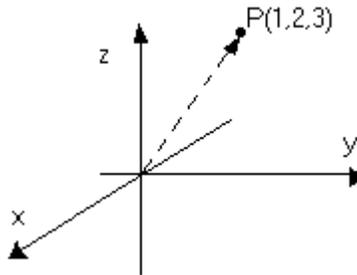
em que \vec{r} e \vec{r}' são os vetores que a partir da ori respectivamente.



EX. 01: Calcule o campo criado por uma carga de 1 C situado na origem em um ponto P situação em $(1,-2,3)$.

Solução:

$$\vec{E} = K \frac{Q\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = K \frac{Q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\text{Dados: } \vec{r} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} = (1, -2, 3)$$

$$\vec{r}' = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\vec{E} = \frac{9 \cdot 10^9 (-1)(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})}{(\sqrt{14})^3}$$

$$\vec{E} = \frac{9 \cdot 10^9}{\sqrt{14}} (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\vec{E} = \frac{9 \cdot 10^9}{\sqrt{15}} (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \quad (\text{resp.})$$

Como o campo elétrico é um vetor, o campo devido a N cargas em um ponto qualquer é a soma de:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \text{ com } \vec{E}_i = k \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, i = 1, 2, \dots, N, \text{ ou ainda,}$$

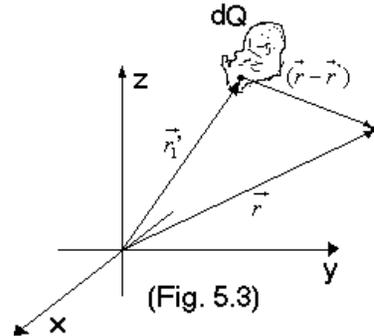
$$\vec{E}_i = k \frac{Q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + k \frac{Q_2(\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} + \dots + k \frac{Q_N(\vec{r} - \vec{r}_N)}{|\vec{r} - \vec{r}_N|^3}, \text{ ou}$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N k \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

EX. 02: Quatro cargas $Q_1 = -1C, Q_2 = 2C, Q_3 = 1C, Q_4 = -2C$ estão situadas nos vértices de um quadrado de lado 1 m. Calcule o campo resultante no centro do quadrado.

5_2.3- CAMPO ELÉTRICO DEVIDO A DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGA.

Uma distribuição contínua de cargas elétricas, em última análise, não existe, uma vez que a carga é quantizada (múltipla inteira de $1,6 \cdot 10^{-19} C$). Entretanto, quando lidamos com situações macroscópica, o que em geral é o caso, o caráter quantizado da carga pode ignorado, de modo que podemos tratá-los como uma distribuição contínua (lembre-se de que 1C equivale a 10^{18} partículas). Esse fato é análogo a tratar a massa como sendo uma distribuição contínua, mesmo sabendo que ela é múltipla de uma massa atômica ou de uma molécula. Imaginando a carga como uma distribuição contínua, podemos definir uma densidade de cargas como sendo carga por unidade de comprimento, área ou volume:



$$\rho_L = \frac{dQ}{dL}; \rho_S = \frac{dQ}{dS}; \rho_V = \frac{dQ}{dV}, \text{ em que } dL, dS \text{ e } dV$$

são os elementos de comprimento, área e volume, ρ_L, ρ_S, ρ_V são as densidades linear, superficial e volumétrica de carga, respectivamente, e não deve ser confundida com a coordenada cilíndrica.

Lembrando que uma carga infinitesimal deve produzir um campo ($d\vec{E}$) também infinitesimal, podemos escrever:

$$d\vec{E} = k \frac{dQ(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Em que \vec{r}' é o vetor que localiza o elemento de carga dQ . Fazendo a integração desde um ponto em que qualquer, temos:

$$\vec{E} = k \int \frac{dQ(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Note que a integração se anula onde não houver carga.

EX.03: Calcule o campo elétrico em um ponto a uma distância R do centro uma esfera carregada de raio r_0 .

Solução:

ELETROMAGNETISMO

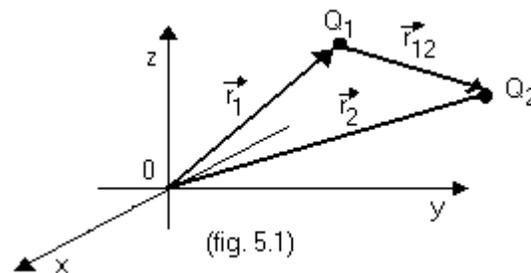
5ª Aula: **ELETRÓSTÁTICA**

- 5_1 Lei de Coulomb;
- 5_2 Campo elétrico;
- 5_2.1 Campo devido a N cargas pontuais;
- 5_3 Campo elétrico de distribuições contínuas de carga.

5_1 LEI DE COULOMB

A lei de Coulomb é eminentemente experimental. Ela descreve a força de natureza elétrica entre duas cargas estáticas Q_1 e Q_2 :

$$\vec{F}_{12} = K_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$



Em que $r_{12} = \frac{r}{r}$; $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$;

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm}$$

Em palavras, a lei de Coulomb estabelece que a força elétrica entre duas cargas é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Além disso, a força é dirigida ao longo da linha que une as cargas e é repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal e atrativa se forem de sinal

contrário. A menor unidade de carga elétrica é igual à carga de um elétron que vale $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Portanto, seriam necessárias cerca de 10^{18} elétrons para se ter 1 Coulomb (C).

Note que o sinal de Q_1 e Q_2 é fundamental para definir o sentido da força. Por exemplo, se $Q_1 = -2\text{C}$ e $Q_2 = 2\text{C}$ na figura 5.1, então o sentido da força em Q_1 é $-r_{12}$, enquanto que o sentido da força em Q_2 é $r_{21} = -r_{12}$.

5.2 CAMPO ELÉTRICO

Definição: Suponha que uma carga Q esteja fixo e que levemos uma outra carga q chamada “carga de teste”, para diversos pontos ao redor de Q , em cada ponto, meçamos a força experimentada pela carga q . Esse procedimento evidenciará que existe um campo de forças (campo vetorial) portanto ao redor de Q .

Assim, pela lei de Coulomb, temos :

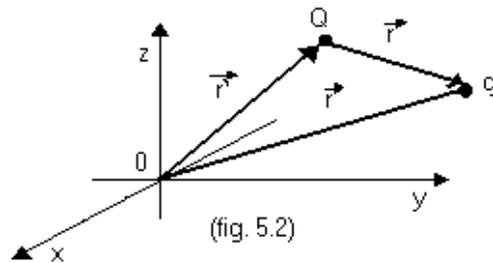
$$\vec{F} = K \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$

em que $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ (ver fig 5.2).

Define-se campo elétrico \vec{E} em torno

$$\frac{\vec{F}}{q} \equiv \vec{E} = \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = K \frac{Q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

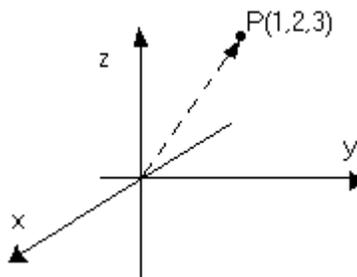
em que \vec{r} e \vec{r}' são os vetores que a partir da origem respectivamente.



EX. 01: Calcule o campo criado por uma carga de 1 C situado na origem em um ponto P situação em $(1, -2, 3)$.

Solução:

$$\vec{E} = K \frac{Q\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = K \frac{Q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Dados: $\vec{r} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} = (1, -2, 3)$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (0, 0, 0) \\ \vec{r} - \vec{r} &= \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}| &= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \\ \vec{E} &= \frac{9 \cdot 10^9 (-1)(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})}{(\sqrt{14})^3} \\ \vec{E} &= \frac{9 \cdot 10^9}{\sqrt{14}} (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \\ \vec{E} &= \frac{9 \cdot 10^9}{\sqrt{15}} (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) \quad (\text{resp.}) \end{aligned}$$

5_2.1 Campo devido a N cargas puntuais

Como o campo elétrico é um vetor, o campo devido a N cargas em um ponto qualquer é a soma de:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \text{ com } \vec{E}_i = k \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}, i = 1, 2, \dots, N, \text{ ou ainda,}$$

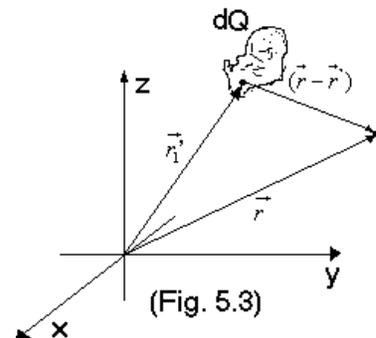
$$\vec{E}_i = k \frac{Q_1(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + k \frac{Q_2(\vec{r} - \vec{r}_2)}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} + \dots + k \frac{Q_N(\vec{r} - \vec{r}_N)}{|\vec{r} - \vec{r}_N|^3}, \text{ ou}$$

$$\vec{E}_i = \sum_{i=1}^N k \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}.$$

EX. 02: Quatro cargas $Q_1 = -1C, Q_2 = 2C, Q_3 = 1C, Q_4 = -2C$ estão situadas nos vértices de um quadrado de lado 1 m. Calcule o campo resultante no centro do quadrado.

5_2.3- CAMPO ELÉTRICO DEVIDO A DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGA.

Uma distribuição contínua de cargas elétricas, em última análise, não existe, uma vez que a carga é quantizada (múltipla inteira de $1,6 \cdot 10^{-19} C$). Entretanto, quando lidamos com situações macroscópica, o que em geral é o caso, o caráter quantizado da carga pode ignorado, de modo que podemos tratá-los como uma distribuição contínua (lembre-se de que 1C equivale a 10^{18} partículas). Esse fato é análogo a tratar a massa como sendo uma distribuição contínua, mesmo sabendo que ela é múltipla de uma massa atômica ou de uma molécula. Imaginando a carga como uma distribuição contínua, podemos definir uma densidade de cargas como sendo carga por unidade de comprimento,



área ou volume:

$$\rho_L = \frac{dQ}{dL}; \rho_S = \frac{dQ}{dS}; \rho_V = \frac{dQ}{dV}, \text{ em que } dL, dS \text{ e } dV$$

são os elementos de comprimento, área e volume, ρ_L, ρ_S, ρ_V são as densidades linear, superficial e volumétrica de carga, respectivamente, e não deve ser confundida com a coordenada cilíndrica.

Lembrando que uma carga infinitesimal deve produzir um campo ($d\vec{E}$) também infinitesimal, podemos escrever:

$$d\vec{E} = k \frac{dQ(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Em que \vec{r}' é o vetor que localiza o elemento de carga dQ . Fazendo a integração desde um ponto em que até um ponto qualquer, temos:

$$\vec{E} = k \int \frac{dQ(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Note que a integração se anula onde não houver carga.

EX.03: Calcule o campo elétrico em um ponto a uma distância R do centro uma esfera carregada de raio r_0 .

Solução:

ELETROMAGNETISMO

6ª Aula: EXERCÍCIO RESOLVIDOS (Eletrostática)

O objetivo desta aula é fixar os conceitos expostos na aula anterior. Vimos, por exemplo que o campo \vec{E} de uma carga puntual é:

$$\vec{E} = k \frac{Q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

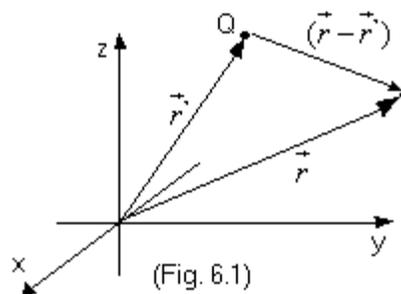
sendo (ver Fig. 6.1)

k a constante de Coulomb;

Q a carga que gera o campo \vec{E} ;

\vec{r} o vetor que parte da origem até o ponto onde se quer calcular \vec{E} ;

\vec{r}' o vetor que liga a origem até a carga Q .



Para várias cargas pontuais, temos:

$$\vec{E} = k \sum_{i=1}^N \frac{Q(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \quad \text{Em que o índice } i \text{ se refere à } i\text{-ésima carga.}$$

Para uma distribuição contínua de cargas, temos:

$$\vec{E} = k \int \frac{dQ}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \quad \text{Em que } dQ \text{ é um elemento diferencial de carga de carga elétrica. Para uma densidade superficial } \rho_s \text{ de carga elétrica, } dQ = \rho_s dS, \text{ } dS \Rightarrow \text{ elemento de área (superfície).}$$

EX.01: Três cargas de $Q = 10^{-9} \text{ C}$ são colocadas nos vértices de um quadrado de lado $l = 3$. Calcule o campo \vec{E} no vértice em que não existe carga.

Solução:

$$\vec{E} = k \sum_{i=1}^3 Q_i \frac{(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Da figura 6.2, (carga 2 na origem) temos:

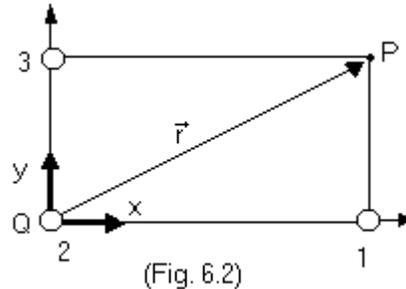
$$\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\vec{r}_1 = 3\hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = 0$$

$$\vec{r}_3 = 3\hat{j}$$

$$\text{para } i=1 : E_1 = k \frac{Q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$



(Fig. 6.2)

$$(\vec{r}-\vec{r}_1) = 3\hat{j} \quad ; \quad |\vec{r}-\vec{r}_1| = 3 \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}-\vec{r}_1|^3 = (3)^3 = 27$$

$$\therefore E_1 = \frac{9 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-9} \cdot 3\hat{j}}{27} = j$$

$$\text{para } i=2 : E_2 = k \frac{Q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}$$

$$(\vec{r}-\vec{r}_2) = (3\hat{i} + 3\hat{j}) \quad ; \quad |\vec{r}-\vec{r}_2| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}-\vec{r}_2|^3 = (\sqrt{18})^3 = (3\sqrt{2})^3 = 27(\sqrt{2})^3$$

Nota: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$$\therefore E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} (3\hat{i} + 3\hat{j})}{27(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} (\hat{i} + \hat{j})$$

para $i = 3$: $E_3 = k \frac{Q_3(\vec{r} - \vec{r}_3)}{|\vec{r} - \vec{r}_3|^3}$

$$(\vec{r} - \vec{r}_3) = 3\hat{i} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_3|^3 = 27 \quad \therefore E_3 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} 3\hat{i}}{27} = \hat{i}$$

Somando: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$, temos:

$$\vec{E} = \hat{j} + \frac{1}{(\sqrt{2})^3} (\hat{i} + \hat{j}) + \hat{i} = \hat{i} \left(1 + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\right) + \hat{j} \left(1 + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\right) \therefore$$

$$\vec{E} = \left[\frac{(\sqrt{2})^3 + 1}{(\sqrt{2})^3} \right] (\hat{i} + \hat{j}) \text{ (resp.)}$$

EX. 02: Encontre o campo \vec{E} em um ponto que passa pelo eixo de um anel carregado com uma distribuição uniforme linear de cargas e raio $\rho = R$.

Solução:

Do exercício (simetria cilíndrica)

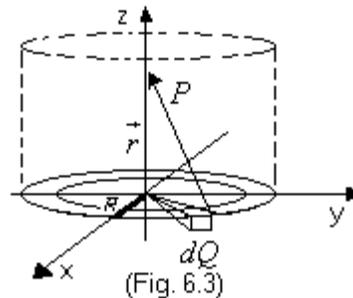
$$dQ = \rho_L dL = \rho_L \rho d\phi = \rho_L R d\phi$$

$$\vec{r} = zk$$

$$\vec{r}' = \rho \hat{\rho} = R \hat{\rho} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = (R^2 + z^2)^{1/2}$$

Logo: $\vec{E} = k \int_0^{2\pi} \rho_L R \frac{d\phi(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ ou $\vec{E} =$

$$\vec{E} = k \rho_L R \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\phi z k}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - R \int_0^{2\pi} \frac{d\phi R \hat{\rho}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$$



Da simetria do problema, $\vec{E} = Ek$ e, portanto, a componente na direção radial deve ser nula:

$$\vec{E} = k \rho_L \frac{R(2\pi)k}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \text{ ou } Q = (2\pi R) \rho_L$$

$$\therefore \vec{E} = k \frac{Qk}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

EX. 03: Encontre \vec{E} de um plano infinito de cargas.

Solução: Podemos imaginar um plano infinito como sendo formado por infinitos anéis concêntricos de $\rho = R$ variável. Lembrando o exercício anterior:

$$dQ = \rho_s dS$$

$$dS = \rho d\rho d\phi$$

$$\vec{r} = zk$$

$$\vec{r}' = \rho \hat{\rho}$$

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}' = zk - \rho \hat{\rho} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + \rho^2)^{1/2}$$

$$\text{Logo: } \vec{E} = k \int_s \rho_s \frac{dS(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E} = k \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \rho_s \frac{\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} (zk - \rho \hat{\rho})$$

Como no exercício anterior, não haverá campo ao longo de $\hat{\rho}$, logo:

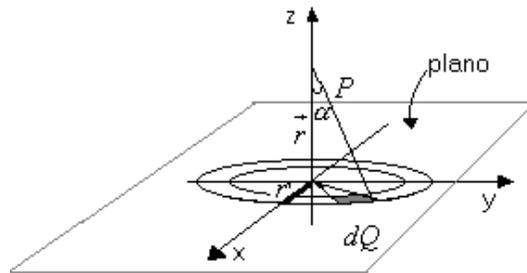
$$\vec{E} = \rho_s k (2\pi) k \int_0^\infty z \frac{d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Essa é uma integral que pode ser resolvida por substituição trigonométrica. Da figura 6.4 podemos formar o triângulo mostrado na figura 6.5, e escrever:

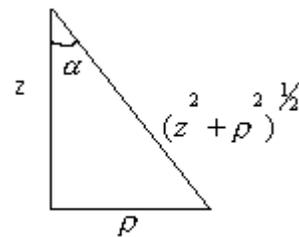
$$\vec{E} = \rho_s k (2\pi) k \int_0^\infty \frac{d\rho}{z^3 [1 + \rho^2/z^2]^{3/2}}$$

$$\frac{\rho}{z} = \text{tg} \alpha \Rightarrow \rho = z \text{tg} \alpha \Rightarrow d\rho = z \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad ; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$



(Fig. 6.4)



(Fig. 6.5)

ELETROMAGNETISMO

7ª Aula: LEI DE GAUSS NA FORMA INTEGRAL

- 7_1 Linhas de Campo;
- 7_2 Fluxo de Campo Vetorial;
- 7.2.1 Fluxo de Campo Elétrico e Lei de Gauss;
- 7_3 Fluxo de \vec{E} e lei de Gauss;
- 7_4 Aplicações.

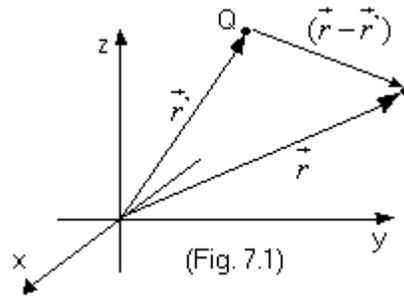
7.1 LINHAS DE CAMPO

Vimos que o campo elétrico é dado por (ver figura 7.1)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

e, para uma carga elétrica situada na origem ($\vec{r}' = 0$):

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$



sendo, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ o vetor unitário que parte da carga (origem) em direção ao ponto P onde se quer calcular o campo \vec{E} (ver figura 7.2).

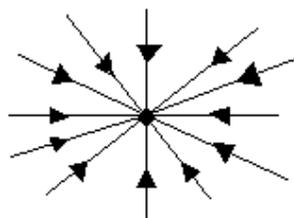
quer calcular o campo \vec{E} (ver figura 7.2).

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

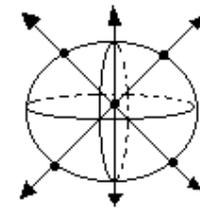
$$E \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad r \rightarrow \infty$$

$$E \rightarrow \infty \quad \text{se} \quad r \rightarrow 0$$

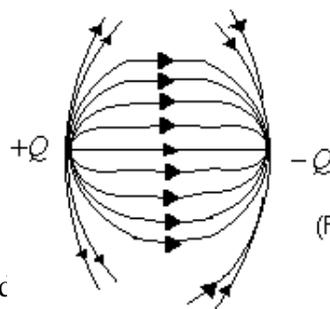
Para representar o campo \vec{E} ao redor da carga Q , usamos retas ao redor da carga Q apontando radialmente para fora (\hat{r}) se $Q > 0$, e radialmente para dentro ($-\hat{r}$) se $Q < 0$. Note que, quanto maior Q , maior a quantidade dessas retas, chamadas de “linhas de força” ou campo de \vec{E} :



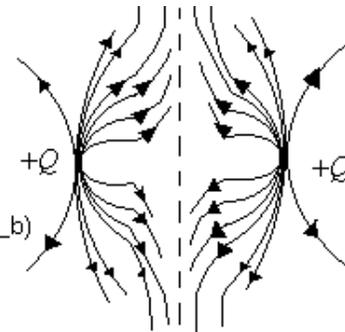
carga negativa ($-2Q$)



carga positiva (Q)



Dipolo elétrico

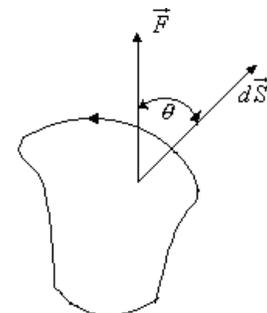


Duas cargas positivas

Note que as figuras c
duas direções simultâneas p:

7.2 FLUXO DE UM CAMPO VETORIAL F

- Definição: $\phi_F = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$



(Fig. 7.4)

$\phi_F \Rightarrow$ Fluxo de campo vetorial

$\vec{F} \Rightarrow$ Campo vetorial

$d\vec{S} \Rightarrow$ elemento de área na forma vetorial

cujo sentido é definido pela regra de mão direita (ver figura 7.4).

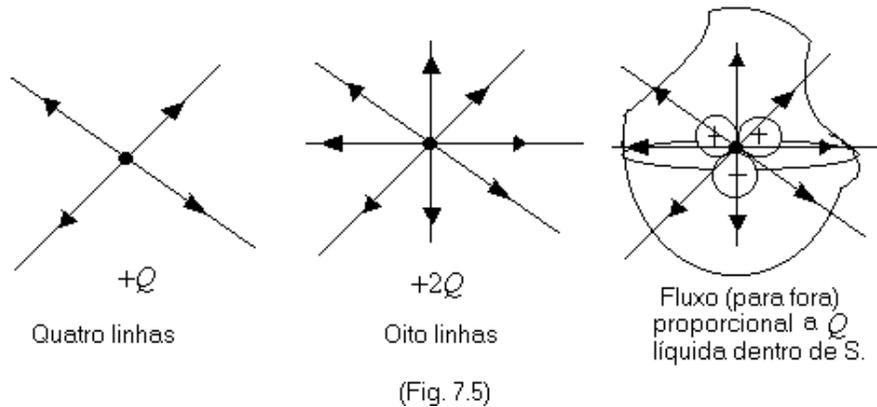
Nota : Caso S seja fechado, é comum utilizar o símbolo \oiint_S

7.2.1 FLUXO DE CAMPO ELÉTRICO E LEI DE GAUSS

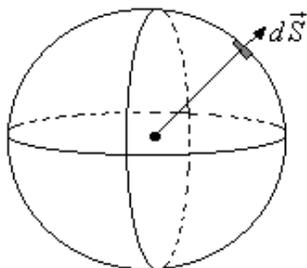
O fluxo de campo elétrico ϕ_E é uma medida da quantidade de linha de força de \vec{E} atravessando uma dada área S (ver figura 6.5). Como o fluxo é proporcional ao campo, e este é proporcional à carga, podemos afirmar que, para uma superfície fechada qualquer, quanto maior a carga dentro dessa superfície, tanto maior o fluxo para dentro ($Q > 0$) ou para fora ($Q < 0$). Em outras palavras:

“O Fluxo através de uma superfície fechada é proporcional à carga envolvida pela superfície.”

- Lei de Gauss



Matematicamente: $\phi_E \propto Q$ ou $\phi_E = bQ$, ou ainda, como a superfície é fechada, $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = bQ$ em que \oiint indica integral numa superfície fechada; $d\vec{S}$ é perpendicular a S e ρ aponta para fora da superfície fechada, por convenção. Para determinar a constante de proporcionalidade vamos determinar ϕ_E de uma carga puntual Q escolhendo uma superfície fechada (chamada de gaussiana) esférica centrada em Q (ver figura 7.6) e raio r :



(Fig. 7.6)

Pela lei de Gauss, temos:

$$\phi_E = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = bQ$$

Como \vec{E} é paralelo a $d\vec{S}$ (ambos apontam radialmente para fora). Logo:

$$\oiint E ds \cos 0^\circ = bQ$$

Como E é constante ao longo de $ES = 4\pi r^2$:

$$E \oint dS = bQ \Rightarrow ES = bQ \quad \text{ou} \quad E = \frac{bQ}{4\pi r^2} \quad \text{comparando com } E \text{ de uma carga puntual:}$$

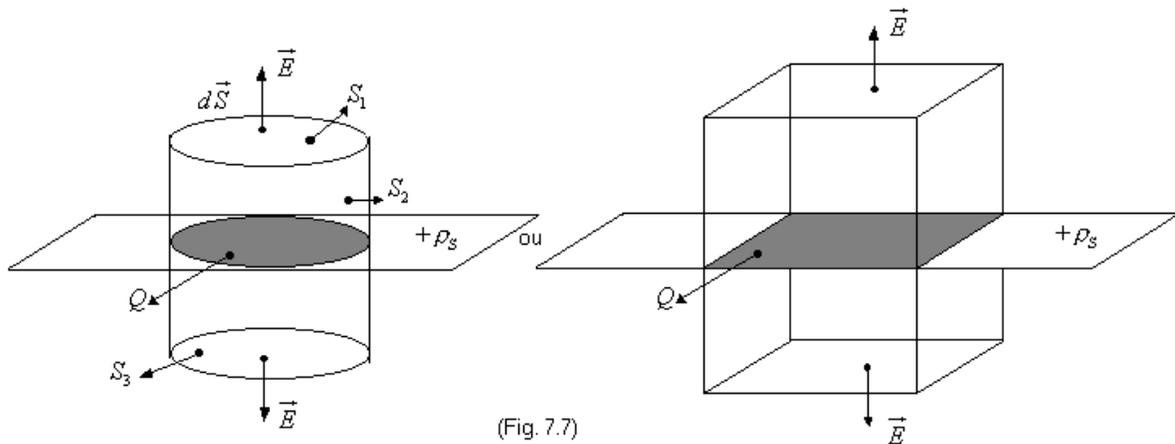
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad \text{sendo que } b = \frac{1}{\epsilon_0}. \quad \text{Portanto:}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss na forma integral})$$

7.4 APLICAÇÕES DA LEI DE GAUSS

EX.01: Calcule \vec{E} devido a uma distribuição uniforme superficial e infinita de cargas positivas.

Solução: Pela simetria, o campo \vec{E} deve ser perpendicular ao plano. Escolhendo uma superfície retangular que possa por um ponto P onde queremos calcular E ou uma superfície cilíndrica (ver figura 7.7), temos:



$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Escolhendo o cilindro, temos que fazer três integrais: duas para as

tampas, uma para o cilindro:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Note que: para o cilindro S_2 , \vec{E} é perpendicular a $d\vec{S}$, enquanto que para S_1 e S_3 , sendo que \vec{E} é paralelo a $d\vec{S}$.

Logo:

$$\int_{S_1} E dS + \int_{S_3} E dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{ou}$$

$$ES + ES = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$2ES = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{ou}$$

$$E = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0} \quad (\text{resp.}) \quad ; \quad \rho \equiv \frac{Q}{S}$$

ELETROMAGNETISMO

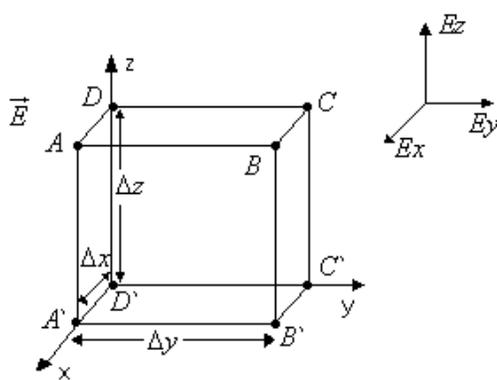
8ª Aula: **LEI DE GAUSS NA FORMA DIFERENCIAL**

- 8_1 Introdução: fluxo através de um paralelepípedo;
- 8_3 Teorema da Divergência.

8_1 REGIÃO DA GAUSSIANA

Para encontrar a lei de Gauss na forma diferencial, tomemos um cubo de volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ numa região onde exista uma campo \vec{E} (ver figura 7.1). Pela lei de Gauss:

$\phi_E = \iiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ ou de forma aproximada, $\Delta\phi_E \cong \vec{E} \cdot \Delta\vec{S}$ em que a igualdade ocorrerá no limite $\Delta S \rightarrow 0$: $d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$.



(Fig. 7.1)

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$

$$d\vec{S} = dS_x \hat{i} + dS_y \hat{j} + dS_z \hat{k}$$

$$dS_x = dydz$$

$$dS_y = dx dz$$

$$dS_z = dx dy$$

Para calcular $\Delta\phi_E$ total atravessando esse cubo temos que somar o fluxo ϕ_E através de cada face:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_E = & \Delta\phi_E(ABCD) + \Delta\phi_E(A'B'C'D') + \\ & \Delta\phi_E(ABA'B') + \Delta\phi_E(DCD'C') + \\ & \Delta\phi_E(ADA'D') + \Delta\phi_E(BCB'C') \end{aligned}$$

Se o cubo for suficientemente pequeno, podemos aproximar o vetor de $\vec{E}(x, y, z)$ na face do cubo pelo valor de $\vec{E}(x_c, y_c, z_c)$, sendo (x_c, y_c, z_c) as coordenadas do centro da face do cubo. Naturalmente, esperamos que quanto menor o cubo, melhor será essa aproximação, sendo $E(x, y, z) = E(x_c, y_c, z_c)$ no limite em que $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow dx dy dz$.

Começemos por calcular $\Delta\phi_E(A'B'C'D')$ na face $A'B'C'D'$, que chamemos de face_1, sendo (x_1, y_1, z_1) as coordenadas do centro desst face. Da definição de fluxo:

$$\Delta\phi_E(ABCD) = \int_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{S} \cong \vec{E}(x_{c1}, y_{c2}, z_{c3}) \cdot \Delta\vec{S}$$

$$\Delta\phi_E(ABCD) \cong [E_x(x_1, y_1, z_1)\hat{i} + E_y(x_1, y_1, z_1)\hat{j} + E_z(x_1, y_1, z_1)\hat{k}] \cdot \Delta x \Delta y \hat{k}$$

$$\boxed{\Delta\phi_E(ABCD) \cong -E_z(x_1, y_1, z_1) \Delta x \Delta y}$$

Calculando o fluxo através da face oposta $ABCD$, teremos:

$$\Delta\phi_E(ABCD) \cong \vec{E}(x_1, y_1, z_1 + \Delta z) \cdot \Delta x \Delta y \hat{k}$$

Chamando a face $ADAD$ de face-2 e designando as coordenadas dessa face por (x_2, y_2, z_2) , teremos:

$$\Delta\phi_E(ADAD) \cong \vec{E}(x_2, y_2, z_2) \cdot \Delta x \Delta z (-\hat{j}) \quad \text{ou}$$

$$\phi_E(ADAD) \cong -E_y(x_2, y_2, z_2) \Delta x \Delta z$$

e, para a face $DCDC$, oposta à face-3, e designando de x_3, y_3, z_3 as coordenadas do seu centro, teremos:

$$\Delta\phi_E(DCDC) \cong \vec{E}(x_3, y_3, z_3) \Delta y \Delta z (-\hat{i}) \quad \text{ou}$$

$$\Delta\phi_E(DCDC) \cong -E_x(x_3, y_3, z_3) \Delta y \Delta z$$

e, para face oposta $ABAB$, teremos:

$$\Delta\phi_E(ABAB) \cong \vec{E}(x_3 + \Delta x, y_3, z_3) \Delta z \Delta y \hat{i} \quad \text{ou}$$

$$\Delta\phi_E(ABAB) \cong E_x(x_3 + \Delta x, y_3, z_3) \Delta y \Delta z$$

O fluxo total (aproximado) será, portanto:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_E(ABAB) &\cong [E_z(x_1, y_1, z_1 + \Delta z) - E_z(x_1, y_1, z_1)] \Delta x \Delta y + \\ &= [E_y(x_2, y_2 + \Delta x, z_2) - E_y(x_2, y_2, z_2)] \Delta x \Delta y + \\ &= [E_x(x_3 + \Delta x, y_3, z_3) - E_x(x_3, y_3, z_3)] \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo o 1º termo por Δz , o 2º termo por Δy e o 3º termo por Δx , teremos:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_E &\cong \frac{[E_z(x_1, y_1, z_1 + \Delta z) - E_z(x_1, y_1, z_1)]}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta z + \\ &\quad \frac{[E_y(x_2, y_2 + \Delta x, z_2) - E_y(x_2, y_2, z_2)]}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z + \\ &\quad \frac{[E_x(x_3 + \Delta x, y_3, z_3) - E_x(x_3, y_3, z_3)]}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Tomando o limite de $\Delta x, \Delta y$ e Δz tendendo a zero e lembrando a definição de derivada parcial, teremos:

$$d\phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad , \text{ ou}$$

$$\boxed{d\phi_E = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dx dy dz}$$

Supondo a existência de carga elétrica no interior do volume diferencial, devem ter:

$$\frac{d\phi}{dxdydz} = \rho_v \quad \text{ou} \quad dQ = \rho_v dxdydz \quad \text{e portanto, pela lei de Gauss:}$$

$$d\phi_E = \frac{dQ}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dxdydz = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dxdydz \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0}}$$

8_3 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

O teorema da divergência permite o cálculo \vec{E} através de uma integral de superfície ou de volume. Da lei de Gauss na forma integral:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q = \int_V \frac{\rho_v}{\epsilon_0} dV$$

Substituindo $\frac{\rho_v}{\epsilon_0}$ por $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, temos:

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV}$$

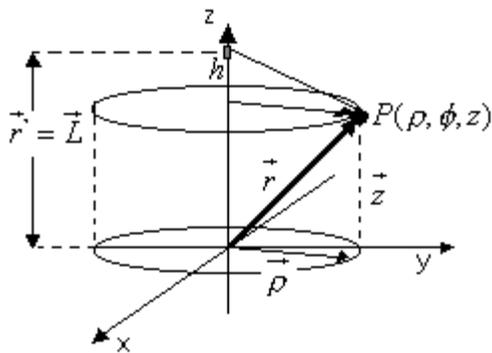
ELETROMAGNETISMO

9ª Aula: EXERCÍCIO RESOLVIDOS (LEI DE GAUSS)

EX. 01: Dada uma distribuição linear, uniforme e infinita de cargas, calcule o campo \vec{E} :

- usando a definição de campo \vec{E} ;
- usando a lei de Gauss

Solução: a)



$$\vec{E} = k \int dQ \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Rightarrow dQ = \rho_L dL$$

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{z} = \rho \vec{\rho} + z \vec{k}$$

$$\vec{r}' = L \vec{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \vec{\rho} - (z - L) \vec{k}$$

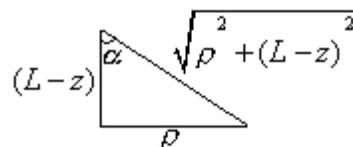
$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [\rho^2 + (L - z)^2]^{1/2}$$

$$\vec{E} = k \int \rho_L \frac{dL [\rho \vec{\rho} - (z - L) \vec{k}]}{[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}} \quad \text{Por razões de simetria, } E_z = 0;$$

$$\vec{E} = k \rho_L \int dL \frac{\rho \vec{\rho}}{[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}}$$

$$\vec{E} = k \rho_L \int \rho \frac{dL}{[\rho^2 + (L - z)^2]^{3/2}}$$

ou :



Mudança de coordenada:

$$\frac{L-z}{\rho} = \cot \alpha \Rightarrow dL = -\rho \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$\vec{E} = -k \rho_L \rho \int \frac{\rho \cos \sec \alpha d\alpha}{[\rho^2 + (L-z)^2]^{3/2} \rho} \quad , \text{ como } \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}} = \text{sen} \alpha$$

$$\vec{E} = -k \frac{\rho_L}{\rho} \rho \int \text{sen} \alpha \cos \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$\vec{E} = -\frac{k \rho_L \rho}{\rho} \int \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \alpha} = -\frac{k \rho_L \rho}{\rho} \int \text{sen} \alpha d\alpha = \frac{k \rho_L \rho}{\rho} \cos \alpha$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \frac{(L-z)}{\sqrt{\rho^2 + (L-z)^2}} \Big|_{L=-\infty}^{+\infty} = \frac{\rho_L \rho}{4\pi\epsilon_0 \rho} \frac{(L-z)}{|L-z| \sqrt{\frac{\rho^2}{(L-z)^2} + 1}} \Big|_{L=-\infty}^{+\infty}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_L \rho}{2\pi\epsilon_0 \rho} \quad (\text{resp. "a"})$$

e que se $\rho_L > 0$, \vec{E} aponta radialmente para fora. Se S_1 e S_2 são as tampas da gaussianas e S_3 o lado, assim pela lei de Gauss, temos:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

As integrais em S_1 e S_2 são nulos, pois $\vec{E} \perp d\vec{S}$ então:

$$\int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_3} E \cdot dS \cos 0 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad , \text{ ou}$$

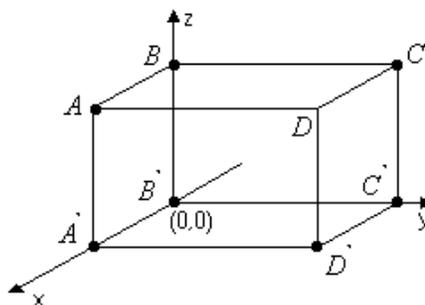
$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(2\pi\epsilon_0\rho)L = \frac{Q}{\epsilon_0} \therefore$$

$$ES = \frac{Q}{L(2\pi\epsilon_0)\rho} \Rightarrow E = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

vetorialmente: $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}}$ (resp. "b")

EX. 02 Verifique o teorema da divergência considerando o paralelepípedo $x=0; x=1; y=0; y=2; z=0; z=3$ (ver figura abaixo) e o campo $\vec{E} = 2y\hat{i} + x^2\hat{j}$.

Solução:



$$E_x = 2yx$$

$$E_y = x^2$$

$$E_z = 0$$

Pelo teorema da divergência, temos:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Para verificar esse teorema, devemos calcular os dois lados mostrados que são iguais. Começando com o lado esquerdo:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV &= \iiint \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint (2y + 0 + 0) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^2 2y dy \int_0^3 dz \\ &= (x \Big|_0^1) (y^2 \Big|_0^2) (z \Big|_0^3) = 1 \cdot 4 \cdot 3 \\ &= 12 \quad (\text{lado esquerdo}) \end{aligned}$$

Para o lado direito:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{ABCD} + \int_{A'B'C'D'} + \int_{ABA'B'} + \int_{DCD'C'} + \int_{ADA'D'} + \int_{BCB'C'}$$

Para a face $ABCD$:

$$\int_{ABCD} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint (2yx\hat{i} + x^2\hat{j}) dx dy k = 0$$

Igualmente, para as outras faces:

$$\int_{A'B'C'D'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{ABA'B'} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint (2yx\hat{i} + x^2\hat{j}) \cdot (-\hat{j}) dx dz = -\int_0^3 \int_0^1 x^2 dx dz \\ &= \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right) (z \Big|_0^3) = -1 \end{aligned}$$

$$\int_{DCD'C'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^3 \int_0^1 x^2 dx dz = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{ADA'D'} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint (2yx\hat{i} + x^2\hat{j}) \cdot \hat{i} dy dz = \int_0^2 \int_0^3 2yxdy dz \quad ; \quad (x=1) \\ &= 2 \cdot (2) \cdot (3) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\int_{BCB'C'} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint (2yx\hat{i} + x^2\hat{j}) \cdot (-\hat{i}) dy dz = \int_0^2 \int_0^3 2yxdy dz = 0$$

pois $x=0$ na face $BCB'C'$.

Somando todas as faces:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 12} \quad \text{lado direito}$$

Logo, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = 12$, que é o significado do teorema.

ELETROMAGNETISMO

10ª Aula : ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA, DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉTRICO E POTENCIAL ELÉTRICO.

- 11_1. Introdução;
- 11_2 Energia Potencial Elétrica;
- 11_3 Diferença de Potencial Elétrico;
- 11_4 Potencial Elétrico;
- 11_5 Apêndice.

11_1 Introdução

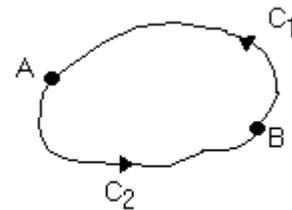
Embora os conceitos de energia potencial, diferença de potencial e potencial elétricos estejam interligados, é importante fazer a distinção entre eles. Também, é importante notar que esses três conceitos só farão sentido se o campo elétrico for conservativo, que é o caso da eletrostática. Por definição, um campo é conservativo se o trabalho realizado na sua presença para mover um objeto de A até B não depender do percurso que liga A a B . Equivalentemente, se o campo é conservativo, o trabalho realizado em qualquer percurso fechado arbitrário é nulo. A prova dessa afirmativa é bastante simples:

Se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ para todo C , então essa integral não depende do percurso. Prova (ver figura A_11.1):

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{A(C_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{B(C_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

25

Invertendo o limite da segunda integral:



(Fig. A_11.1)

$$\int_{A(c_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{B(c_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \therefore \int_{A(c_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{B(c_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Igualmente, se o trabalho não depender do percurso, então o campo é conservativo. Para mostrar isso basta inverter a ordem da dedução acima.

11_2 ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA

Façamos uma analogia com a energia potencial gravitacional. Quando levantamos uma pedra, o trabalho que realizamos contra a força gravitacional é armazenado no sistema Terra + pedra sob a forma de energia potencial gravitacional: se soltarmos a pedra ela cairá, transformando sua energia potencial gravitacional em energia cinética. No caso de cargas elétricas, quando realizamos um trabalho para mover qualquer carga de um ponto a outro próximo de uma segunda carga, esse trabalho fica armazenado sob a forma de energia potencial elétrica: se soltarmos uma das cargas, ela será acelerada para longe ou para perto da outra, dependendo do sinal de ambas.

Como o trabalho que realizamos para mover a carga é feito contra a força elétrica, seja para afastar ou para aproximar uma carga da outra, a menor força externa \vec{F}_{ext} que devemos exercer sobre a carga q para movê-la deve ser igual em módulo à força de Coulomb: $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_c = -q\vec{E}$. A energia potencial elétrica é definida como sendo o (menor) trabalho W realizado por um agente externo (\vec{F}_{ext}) para mover uma carga de um ponto A a outro ponto B . Matematicamente:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ext} \cdot d\vec{l} \quad \left| \quad \begin{array}{l} d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \quad (\text{cartesianas}) \\ d\vec{l} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{k} \quad (\text{cilíndricas}) \\ d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi} \quad (\text{esféricas}) \end{array} \right.$$

ou

$$W_{AB} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

[W] = Joule (J)

Importante: na integral acima, q é a carga conduzida de A até B , e não a carga que produz o campo \vec{E} .

11_3 DIFERENÇA DE POTENCIAL ELÉTRICO

A diferença de potencial elétrico (DDP) é simplesmente o trabalho W_{AB} por unidade de carga q :

$$\frac{W_{AB}}{q} = V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad [V_{AB}] = \frac{\text{Joules}}{\text{Coulombs}}$$

Note que se $V_B = V_A$, isto é se o percurso for fechado, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Essa é a condição para que \vec{E} seja conservativo e, em teoria de circuitos, é conhecida por lei de Kirchoff.

Comparando W_{AB} e V_{AB} , poderíamos interpretar V_{AB} como sendo o trabalho W_{AB} realizado por um agente externo para mover uma carga de 1 Coulomb desde A até B . Repare, entretanto que, a unidade de V_{AB} é *Joule/Coulomb*, sendo portanto, grandezas diferentes.

11_4 POTENCIAL ELÉTRICO

O potencial elétrico $V(r)$ é simplesmente a DDP $V_A - V_B$ tomada em um ponto tal que $V_B = 0$: $V_A = V$. O ponto $V_B = 0$ é, em geral, pré-estabelecido ou especificado de antemão. Matematicamente:

$$V = -\int_o^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

O limite inferior, denotado por O , é uma referência escolhida tal que $V(O)$ é nulo. Por exemplo, para uma carga puntual $V(O)$ é nulo no infinito, já para um plano infinito, O deve ser escolhido como sendo a origem do sistema de coordenadas. Em medidas experimentais, é usual estabelecer um potencial nulo no solo (Terra). Para que esse ponto não fique confuso, talvez seja útil recorrer à analogia com o potencial gravitacional. Para uma pedra abandonada de uma certa altura, é mais conveniente escolher essa altura em relação ao nível com o qual a pedra irá se chocar (ver figura 11.1), embora o “zero” pudesse ser escolhido de forma inteiramente arbitrária. Em outras palavras, o importante é a diferença de potencial elétrico entre os dois pontos quaisquer, e não o potencial. Por exemplo,

se $V = -\int_o^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$ é o potencial no ponto A e $V = -\int_o^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ é o potencial no ponto B , então $V_B - V_A$ independe da referência O . Prova:

$$V_B - V_A = -\int_o^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_o^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\int_o^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_o^B \vec{E} \cdot d\vec{l}\right) ;$$

em que usamos $\int_A^B f(x)dx + \int_B^C f(x)dx = \int_A^C f(x)dx$.

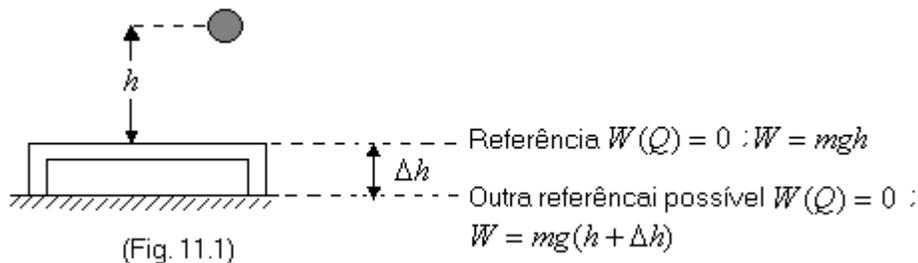


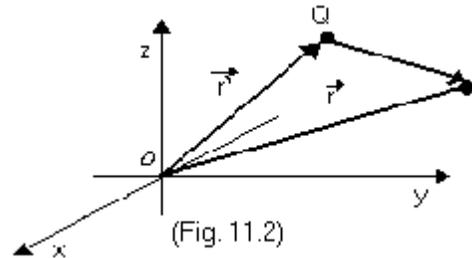
Fig. 11.1: A referência O pode ser escolhida arbitrariamente. Note que considerando mgh constante, a escolha de O no infinito leva a W infinito!

EX. 01: a) Calcule o potencial elétrico devido a uma carga Q puntual em um ponto r_B (escolher O no infinito); b) Calcule $V_B - V_A$ entre dois pontos A e B quaisquer; c) Calcule o trabalho necessário para mover uma carga q de A para B ; c) V_B , $V_B - V_A$ e W_{AB} dependeram do caminho? Por que?

Solução:

a) Para uma carga puntual:

$$\vec{E} = \frac{kQ(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



Escolhendo $\vec{r}' = 0$ (carga na origem, simetria esférica):

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r} \Rightarrow V(r_B) = -\int_{\infty}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V_B = -\int_{\infty}^{r_B} \frac{kQ\hat{r}}{r^2} \cdot (dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi})\hat{r} \quad , \text{ como } \hat{\theta} \perp \hat{\phi} \quad ,$$

$$V_B = -\int_{\infty}^{r_B} \frac{kQ}{r^2} dr = -\left[-\frac{kQ}{r} \Big|_{\infty}^{r_B}\right] = kQ\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{\rightarrow\infty}}\right) \therefore$$

$$V_B = \frac{kQ}{r_B} \quad (\text{resp "a"})$$

b) Fazendo $B \rightarrow A$, temos: $V_A = \frac{kQ}{r_B} \therefore$

$$V_B - V_A = \frac{kQ}{r_B} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \quad (\text{resp "b"})$$

c) Como $\frac{W_{AB}}{q} = V_{AB} \Rightarrow W = q(V_B - V_A)$ ou

$$W = kQq\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \quad (\text{resp. "c"})$$

d) Tanto V_B quanto $V_B - V_A$ e W_{AB} só dependem da posição final r_B e $\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}$, respectivamente. Portanto, não dependem do percurso que leva a esses pontos. Note, ainda, que se $r_B = r_A$ (percurso fechado), $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_{AA} = V_{AA} = 0$.

ELETROMAGNETISMO

11ª Aula : CAMPOS CONSERVATIVOS: O CAMPO COMO O GRADIENTE DO POTENCIAL

10_1 Potencial De Várias Cargas e De Distribuição Contínua De Cargas;

10_2 \vec{E} Como Gradiente De $V(r)$.

Introdução

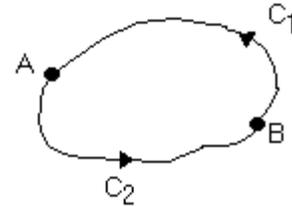
Vimos na aula anterior que um campo é conservativo se o trabalho realizado na sua presença para mover um objeto de A até B não depender do percurso que liga A a B .

Equivalentemente, se o campo é conservativo, o trabalho realizado em qualquer percurso fechado arbitrário é nulo. A prova dessa afirmativa é bastante simples:

Se $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$ para todo C , então essa integral não depende do percurso. Prova (ver figura A_11.1):

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{A(C_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{B(C_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

25



(Fig. A_11.1)

Invertendo o limite da segunda integral:

$$\int_{A(C_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{B(C_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \therefore \int_{A(C_1)}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{B(C_2)}^A \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Igualmente, se o trabalho não depender do percurso, então o campo é conservativo. Para mostrar isso basta inverter a ordem da dedução acima.

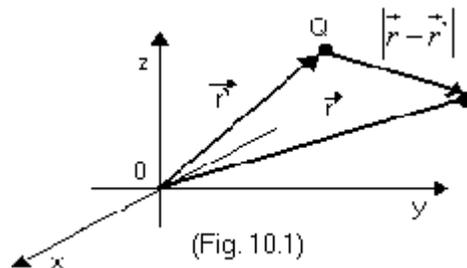
10_1 POTENCIAL DE VÁRIAS CARGAS E DE DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGAS

Vimos, também na aula anterior, que o potencial $V(r)$ em um ponto $r(x, y, z)$ qualquer em relação a uma referência O tal que $V(O) = 0$ é dado por

$$V(r) = -\int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

Para uma carga puntual, vimos também que $V(r) = \frac{kQ_1}{r}$, para uma carga na origem ($\vec{r}' = 0$). Para o caso da carga que gera o potencial não estar na origem (ver figura 10.1), teremos:

$$V(r) = \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



(Fig. 10.1)

Como o potencial é um campo escalar, o potencial resultante em r devido a várias cargas puntuais é a soma:

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) + \dots + V_N(r) = \sum_{i=1}^N V_i(r) \quad , \text{ ou}$$

$$V(r) = \frac{kQ_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{kQ_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \dots + \frac{kQ_N}{|\vec{r} - \vec{r}_N|} = \sum_{i=1}^N \frac{kQ_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

e, para uma distribuição contínua de cargas:

$$V(r) = k \int \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

sendo $dQ = \rho_L dL$, ou $dQ = \rho_S dS$, ou $dQ = \rho_V dv$, conforme o caso. Note que em geral a densidade depende de cada ponto $r'(x', y', z')$, isto é, $r_x = r_x(r')$; $x = L, S, v$.

10.2 \vec{E} COMO O GRADIENTE DE $V(r)$.

De acordo com a Eq.(1),

$$V(r) = - \int_O^r \vec{E} \cdot d\vec{l}, \text{ o que implica } dV = - \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Para verificar essa última equação, basta integrá-la de O até r e compará-la com a primeira. Dessa última equação:

$$\begin{aligned} dV &= - (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) \quad \text{ou} \\ dV &= - (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \end{aligned} \quad (3)$$

Lembrando do cálculo que a diferencial de uma função $V(x, y, z)$ é dada por

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (4)$$

igualando (3) e (4), temos, $E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = - \frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$, e, portanto:

$$\vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \right), \text{ ou, ainda:}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}V} \quad (5)$$

Nota: $\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}$ (cilíndricas)

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$
 (esféricas)

EX. 01: Na figura abaixo (fig 10.2) encontre a) o potencial devido a uma distribuição uniforme anelar de cargas positivas em um ponto P situado ao longo do eixo do anel cujo raio vale R . b) calcule \vec{E} usando a expressão do potencial calculado no item anterior.

Solução:

$$a) V(r) = k \int \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$dQ = r_L(r') dL = r_L dL$$

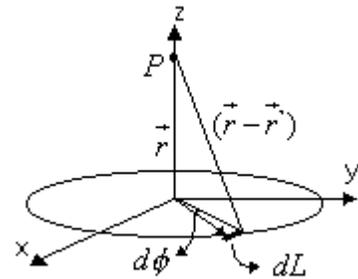
$$r = z \hat{k} \quad ; \quad r' = r \hat{\phi} \quad ; \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + r^2)^{1/2}$$

$$dL = r df = R df$$

$$V(r) = k \int r_L \frac{R df}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{r_L R}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} df$$

$$V(r) = \frac{r_L (2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \quad \text{ou} \quad V(r) = \frac{kQ}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$V(r) = \frac{r_L R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \quad (\text{resp. "a"})$$



(Fig. 10.1)

b) Como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, basta derivar em relação a z , que é a única variável aparecendo em V , isto é $V=(z)$. Isto pode ser feito em coordenadas cilíndricas ou cartesianas:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{r_L R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{k} = -\frac{r_L R}{2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} (R^2 + z^2)^{-1/2} \hat{k} \quad \text{ou}$$

$$\vec{E} = -\frac{r_L R}{4e_0} \left(-\frac{1}{2}\right) (R^2 + z^2)^{-3/2} \vec{z} \setminus$$

$$\vec{E} = \frac{r_L R}{4e_0} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{resp. "b"})$$

EX. 02: O potencial de uma carga puntual localizada na origem ($r = 0$) em um ponto P qualquer localizado a uma distância r da origem é $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$. Encontre $\vec{E}(r)$

..

Solução:

Como $\vec{N}V = \frac{\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} \vec{q} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{dV}{d\phi} \vec{f}$, então

$$\vec{E} = -\vec{N}V = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{dV}{dr} = -\frac{\vec{r}}{r} \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}\right) \setminus$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \quad (\text{resp.})$$

EX. 03: Refaça o exercício anterior para ($r = 0$).

ELETROMAGNETISMO

12ª Aula : DENSIDADE DE ENERGIA NO CAMPO ELETRÓSTÁTICO

- 12_1. Energia Potencial de N Cargas Elétricas Puntuais;
- 12_2. Energia de Uma Distribuição Contínua de Carga Elétrica;
- 12_3. Energia Armazenada No Campo Elétrico;
- 12_5. Exercício.

12_1 ENERGIA POTENCIAL DE N CARGAS ELÉTRICAS PUNTUAIS

Na aula anterior vimos que a energia potencial elétrica de uma carga na presença de um campo \vec{E} é o trabalho realizado (por uma força externa) para mover essa carga de um ponto a outro. Em termos de potencial $V(r_A) = V_A$ no ponto A, o trabalho W_A realizado para mover uma carga q desde O é

$$W_A = q \int_O^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{ou, simplesmente,} \quad W_A = qV_A$$

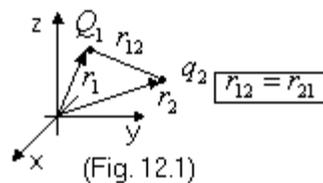
em que $V(r_O) = V_O = 0$, e $V_A = V(r_A)$ é o potencial no ponto $r_A = (x_A, y_A, z_A)$. Para uma carga puntual, $V_A = \frac{kQ}{r_A}$.

Para encontrar a energia potencial de uma configuração de cargas situadas numa região qualquer, devemos calcular o trabalho realizado para mover cada uma das cargas elétricas desde o infinito até a posição ocupada na configuração. O trabalho total é a somatória do trabalho gasto para posicionar cada carga. Para cargas puntuais em que V é nulo no infinito, começamos calculando o trabalho para proporcionar a primeira carga q_1 , que é:

$$W_1 = q_1 V = 0,$$

pois $V = 0$, uma vez que não há cargas gerando V . Para posicionar uma carga q_2 em r_2 próxima de q_1 (onde agora existe o potencial devido a q_1), o trabalho W_2 gasto é (ver figura 12.1):

$$W_2 = q_2 \left(\frac{kq_1}{r_{12}} \right) \equiv q_2 V_{2,1}$$



em que $V_{2,1}$ significa o potencial em r_2 devido à carga q_1 . Para trazer uma terceira carga q_3 do infinito e colocá-la em r_3 próximo de q_1 e q_2 , o trabalho W_3 será:

$$W_3 = q_3 V_{3,1} + q_3 V_{3,2}$$

em que $V_{3,1}$ indica o potencial em r_3 devido a q_1 e $V_{3,2}$ indica o potencial em r_3 devido à carga q_2 . Em geral, V_{ij} indicará o potencial em r_i devido à carga q_j . O trabalho W_4 para trazer uma carga q_4 do infinito e colocá-la em r_4 próxima de q_1, q_2, q_3 , será:

$$W_4 = q_4 V_{4,1} + q_4 V_{4,2} + q_4 V_{4,3}$$

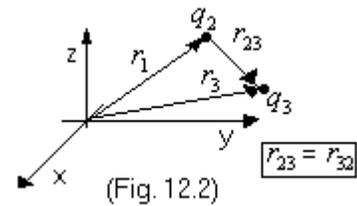
É fácil obter a expressão para o trabalho gasto para se trazer outras cargas do infinito. A energia potencial será o trabalho total:

$$W = W + W + W + W + \dots \quad \text{ou}$$

$$W = q_2 V_{2,1} + q_3 V_{3,1} + q_3 V_{3,2} + q_4 V_{4,1} + q_4 V_{4,2} + q_4 V_{4,3} + \dots \quad (\text{I})$$

Essa última expressão, que muitas vezes é mais prática de se usar para cargas pontuais, pode ser reescrita observando que $q_3 V_{3,2} = q_2 V_{2,3}$ (ver figura 12.2):

$$q_3 \frac{kq_2}{r_{23}} = q_2 \frac{kq_3}{r_{32}}$$



Desse modo, podemos escrever o trabalho total como:

$$W = q_1 V_{1,2} + q_1 V_{1,3} + q_2 V_{2,3} + q_1 V_{1,4} + q_2 V_{2,4} + q_3 V_{3,4} + \dots \quad (\text{II})$$

Somando (I) e (II), temos:

$$\begin{aligned} 2W = & q_1 [V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots] + \\ & q_2 [V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots] + \\ & q_3 [V_{3,1} + V_{3,2} + V_{3,4} + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Note que $V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4} + \dots \equiv V(r_1) = V_1$ é o potencial resultante em r_1 , onde se localiza q_1 , devido às demais cargas; $V_{2,1} + V_{2,3} + V_{2,4} + \dots \equiv V(r_2) = V_2$ é o potencial em r_2 onde localiza q_2 devido às demais cargas, idem para $V_3; V_4; \dots$. Então:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3 + \dots) \quad \text{ou} \\ W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(r_i) \quad (\text{III}) \end{aligned}$$

Portanto, para se calcular a energia potencial elétrica de N cargas pontuais podemos usar qualquer uma das equações I, II e III, acima.

12_2 ENERGIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE CARGA ELÉTRICA

A generalização para o caso de distribuições contínuas de carga pode ser feita imediatamente a partir da eq. III, fazendo $N \rightarrow \infty$:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta q_i V(r_i) \rightarrow W = \frac{1}{2} \int dq V(r) \quad (\text{IV})$$

Em que, na equação IV, a integral é feita em toda a região onde houver cargas.

12_3 ENERGIA ARMAZENADA NO CAMPO ELÉTRICO

A partir da eq. (IV), podemos obter uma expressão relacionando a energia potencial com o campo elétrico produzido pela distribuição de cargas. Para fazer isso, suponhamos uma distribuição volumétrica de cargas em que $dq = \rho_v dv$

$$W = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv \quad (5)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\epsilon_0} V dv$$

Nessa última equação usamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_v / \epsilon_0$. Usando a identidade

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})V + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla}V) \quad (\text{note a semelhança com a regra do produto para derivadas})$$

podemos escrever a Eq.(5) como

$$W = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_v \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V) dv - \frac{1}{2\epsilon_0} \int_v \vec{E} \cdot \vec{\nabla}V dv \quad (6)$$

Usando o teorema de divergência e $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, a Eq.(6) fica:

$$W = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_s (\vec{E}V) \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2\epsilon_0} \int_v \vec{E} \cdot \vec{E} dv \quad (7)$$

sendo S a superfície que limita o volume v .

Essa última expressão pode ser simplificada se fizermos o volume tender para o infinito. De fato, como a superfície S que limita o volume v é arbitrária, porque não escolhê-la como sendo infinitamente grande? Fazendo então o volume v , e conseqüentemente a superfície S tender a infinito, o integrando da primeira integral se anula, pois:

$$EVS \propto \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} r^2 \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} EVS = 0$$

e, portanto, a expressão final para a energia armazenada numa distribuição contínua de cargas é

$$W = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_{\text{em todo o espaço}} E^2 dV \quad (8)$$

Note que enquanto a integral na Eq.(5) é feita na região onde houver cargas, a integral na Eq.(8) deve ser feita em toda a região onde houver campo.

EX. 01: Calcule a energia eletrostática de uma esfera de raio R uniformemente carregada de carga com carga Q .

Solução: O potencial na superfície da esfera é, usando a Eq.(IV):

$$V(R) = \frac{kQ}{R} \text{ e, portanto, de } W = \frac{1}{2} \int dQV(r)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{kQ\rho_s dS}{R} = \frac{kQ}{2R} \int \rho_s dS = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Outro caminho - usando a Eq.(8):

$$W = \frac{1}{2\epsilon_0} \int \left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \frac{k^2 Q^2}{2\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\pi d\phi$$

$$W = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{2\epsilon_0} (2\pi)(2) \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

ELETROMAGNETISMO

13ª Aula : CORRENTE ELÉTRICA, DENSIDADE DE CORRENTE ELÉTRICA, LEI DE OHM E RESISTÊNCIA ELÉTRICA.

- 13_1 Corrente e Densidade de Corrente;
- 13_2 A Equação da Continuidade de corrente;
- 13_3 Lei de Ohm na Forma Vetorial;
- 13_4 Resistência de Um Condutor e Lei de Ohm.

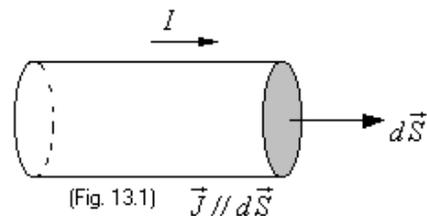
13_1 CORRENTE E DENSIDADE DE CORRENTE ELÉTRICA

A corrente é definida como sendo a taxa de variação das cargas livres (positivas):

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{Eq. 13}_1)$$

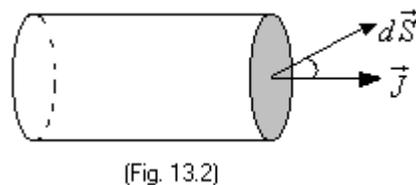
Já a densidade de cargas (J) é definida como sendo a corrente I pela área A_{\perp} de seção transversal de um condutor (figura 13.1):

$$J = \frac{I}{A_{\perp}} \quad \text{ou} \quad I = JA_{\perp} \quad (\text{Eq. 13}_2)$$

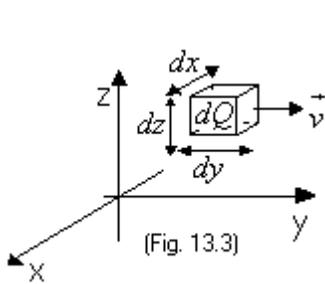


A corrente I em geral é definida como sendo um escalar, já a densidade J é definida como sendo um vetor cujo sentido coincide com o sentido de movimentação da corrente. No caso mais geral em que \vec{J} e $d\vec{S}$ não coincidem (ver figura 13.2), a corrente I é obtida como o fluxo ϕ_j do vetor \vec{J} :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Eq. 13}_3)$$



O vetor \vec{J} está relacionado à velocidade \vec{v} dos portadores de carga. Considere, por exemplo, a Figura 13.3, abaixo, na qual um volume elementar se movimenta ao longo do eixo y:



$$I = \frac{dQ}{dt} = \rho_v \frac{dx dy dz}{dt} = \rho_v v_y dx dz \therefore$$

$$I = \rho_v v_y dS_y \quad dS_z \Rightarrow \text{área perpendicular a } z$$

Logo: $\frac{I}{dS_{\perp}} \rho_v v_y$ ou $J = \rho_v v_y$ ou, ainda,

como v é um vetor: $\vec{J} = \rho_v \vec{v}$ (Eq. 13_4)

13_2 A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE DA CORRENTE

A equação da continuidade de corrente expressa matematicamente a conservação da carga elétrica num ponto. Suponha, por exemplo, um volume qualquer do qual uma certa carga está fluindo (Fig.13.4). Então Q deve diminuir, isto é:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad (\text{Eq. 13}_5)$$

O sinal negativo indica apenas que $\Delta Q < 0$. Da equação (13-3), temos:

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}, \quad \text{ou, como, } Q = \rho_v dv:$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho_v dv = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_v dv \quad (\text{Eq. 13}_6)$$

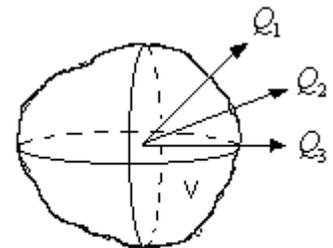
Note que S é a superfície que limita o volume v . Pelo teorema da divergência -

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv, \quad \text{- a equação (13-6) pode ser escrita como:}$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dv = \int_V \left(-\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\right) dv \quad (\text{Eq. 13}_7)$$

e, portanto: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$ (Eq. 13_8),

que é a equação da continuidade. Ela indica que a corrente que flui para fora de um certo volume é igual ao decréscimo da carga em cada ponto dentro desse volume.



(Fig. 13.4)

13_3 LEI DE OHM NA FORMA VETORIAL

Em um material condutor, a força elétrica sobre uma carga Q é dada por:

$$F = Q\vec{E} \quad (\text{Eq. 13}_9)$$

Além disso, a velocidade adquirida pela carga é diretamente proporcional ao campo elétrico, isto é:

$$\vec{v} = \mu_e \vec{E} \quad (\text{Eq. 13}_{10})$$

em que μ_e , a constante de proporcionalidade, é a mobilidade do elétron em um dado material. Como $\vec{J} = \rho_v \vec{v}$ (veja equação 13-4), então:

$$\vec{J} = \rho_v \mu_e \vec{E} \quad \text{ou} \quad (\sigma \equiv \rho_v \mu_e)$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}} \quad (\text{Eq. 13}_{11})$$

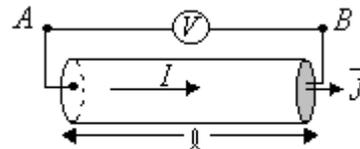
que é a Lei de Ohm na forma vetorial (ou puntual). A constante σ é a condutividade do material. Para condutores típicos (cobre, prata, ouro, etc.) $\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1} / m$ $\left(\frac{1}{\text{ohm} \cdot \text{metro}} \right)$

13_4 RESISTÊNCIA ELÉTRICA E LEI DE OHM

Para um condutor qualquer, valem as equações:

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Eq. 13}_{12})$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Eq. 13}_{13})$$



(Fig. 13.5)

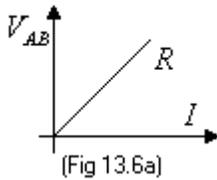
A resistência R de um material é definida como sendo a razão entre V_{AB} e I :

$$R = \frac{-\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}} \quad (\text{Eq. 13}_{14})$$

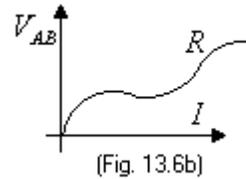
Para o caso de um condutor cilíndrico de seção transversal S (ver figura 13.5), se \vec{E} é uniforme:

$$\frac{V_{AB}}{I} = \frac{El}{JS} = \frac{l}{\sigma S} = R \quad , \quad [R] = \text{ohm} = \Omega \quad , \quad \text{ou} \quad \boxed{V_{AB} = RI} \quad (\text{Eq. 13}_{15})$$

e, nesse caso, a Eq. 13_15 é chamada de lei de Ohm. Note que a relação $V_{AB} = RI$ é válida sempre, sendo V_{AB} e I determinados nas equações (Eq. 13_12) e (Eq. 13_13). Note, também, que a lei de Ohm é um caso particular em que R obedece a uma relação linear entre V_{AB} e I (ver figuras 13.6a e 13.6b):



$V_{AB} \propto I$ (resistor ôhmico)



$V_{AB} \times I$ (resistor não-ôhmico)

ELETROMAGNETISMO

14^a Aula : **CONDUTORES**

14_1 Propriedade dos Condutores:

14-1-1 A Carga elétrica é nula no interior de condutores - A equação da continuidade de corrente elétrica;

14_1-2 O Campo Elétrico é nulo no Interior de um Condutor;

14_1-3 As cargas elétricas se situam na Superfície do condutor;

14_1-4 O campo elétrico é perpendicular à superfície do condutor;

14_1-5. O condutor é um equipotencial.

14_1 PROPRIEDADE DOS CONDUTORES

Um condutor é, por definição, um material no qual um ou mais elétrons de cada átomo (condutor metálico) é livre para se mover através desse material. Em condutores líquidos, tal como a água salgada, são os íons que se movem. As seguintes propriedades eletrostáticas se verificam para um condutor típico: i) a carga elétrica no seu interior é nula; ii) o campo elétrico no seu interior é nulo; iii) em um condutor carregado, a carga elétrica se localiza na superfície; iv) o campo elétrico é sempre perpendicular à superfície do condutor; vi) um condutor é um equipotencial, isto é, dois pontos quaisquer estão sempre a um mesmo potencial.

14_2 A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE PARA CONDUTORES

Quando afirmamos que $\vec{E} = 0$ dentro do condutor estamos nos referindo a situações estáticas, pois é claro que ao colocarmos um condutor na presença de um campo \vec{E}_{ext} as cargas “livres” em seu interior migrarão para a superfície, dando origem a uma corrente elétrica interna. Mostraremos agora que em condutores típicos essa corrente existirá em um tempo tão rápido que dificilmente será acessível experimentalmente, podendo, para efeitos práticos, ser ignorada. Em outras palavras, ao colocarmos um condutor em um campo elétrico, as cargas “instantaneamente” irão para a superfície. Para mostrar isso, vamos resolver a equação da continuidade em termos da densidade volumétrica ρ_V :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \quad (\text{Eq. 14.1})$$

Usando a lei de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e a lei de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0}$, temos:

$$\sigma(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho_V}{\partial t} = -\frac{\sigma \rho_V}{\epsilon_0}, \text{ e, portanto:}$$

$$\rho_V(t) = \rho_V(0) e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon_0}} \quad (\text{Eq. 14.2})$$

O gráfico da Eq.(14-2) está mostrado na Fig. 14-2.

Para exemplificar, vamos calcular quanto tempo leva até que 99 no interior do condutor migrem para a superfície. Da Eq.(14-2):

$$\frac{\rho_V(t)}{\rho_V(0)} = e^{-\frac{\sigma t}{\epsilon_0}} \quad \text{ou}$$

$$\ln \frac{\rho_V(t)}{\rho_V(0)} = -\frac{\sigma t}{\epsilon_0} \ln e \therefore t = \frac{\epsilon_0}{\sigma} \ln \frac{\rho_V(0)}{\rho_V(t)}$$

Para condutores típicos, $\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1}/m$; além disso, $\epsilon_0 \approx 10^{-12} F/m$. Substituindo esses

valores obtemos $t \approx 10^{-7} \times 10^{-12} \times \ln \frac{99,99}{100}$ ou $t \approx 10^{-23} s$,

que é um tempo *muito pequeno* para ser medido experimentalmente, podendo ser considerando nulo para efeitos práticos.

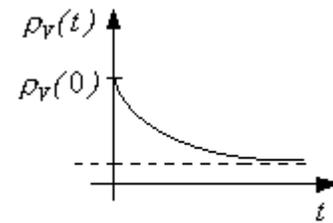
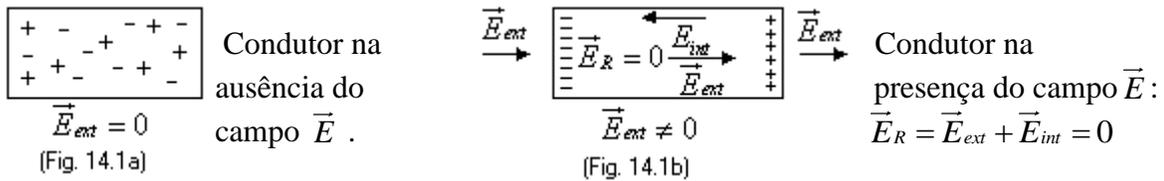


Gráfico $\rho_V(t) \times t$
(Fig. 14.2)

14_3 Campo elétrico dentro dos Condutores

Quando um condutor é colocado em um campo elétrico, as cargas livres dentro do condutor migram para a superfície, provocando uma polarização. Na situação de equilíbrio eletrostático, que ocorre quase instantaneamente como vimos acima, o campo elétrico

externo \vec{E}_{ext} é cancelado pelo campo resultante da polarização dentro do condutor (ver figura 14.1).



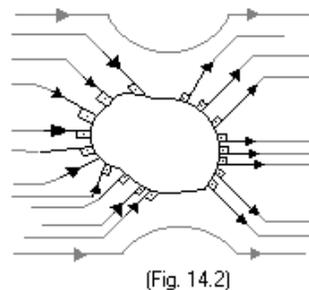
É admirável que o cancelamento do campo dentro do condutor se dê por completo, o que se verifica facilmente em laboratório. Uma importante aplicação dessa propriedade é a gaiola de Faraday, cujo princípio pode ser facilmente demonstrado por um experimento simples, utilizando os seguintes materiais: uma pequena peneira metálica, fragmentos de papel, um pente e um pedaço de borracha cuja superfície seja maior do que a peneira. Coloque os pedaços de papel sobre a borracha e esfregue o pente nos seus cabelos. Verifique que ao aproximar o pente dos pedaços de papel estes são atraídos pelo pente. Use a peneira metálica para cobrir os pequenos pedaços de papel, e verifique que agora os fragmentos deixam de ser atraídos pelo pentes.

14_4 Cargas na Superfície.

As cargas “livres” em um condutor se localizam, por assim dizer, no único lugar que poderiam estar: na superfície. Essa é uma consequência direta do que foi discutido nas seções 14-2 e 14-3.

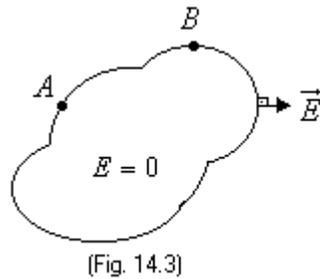
14_5 Campo na Superfície

O \vec{E}_{ext} é perpendicular à superfície do condutor (se houver uma componente tangencial, as cargas se movimentariam pela superfície gerando uma corrente superficial, o que não se verifica - ver figura 14.2). Portanto, a situação de equilíbrio exige que o \vec{E}_{ext} seja perpendicular à superfície.



(Fig. 14.2)

14_5 Um condutor é um equipotencial (figura 14.3), pois



a) Na superfície: $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, uma vez que $\vec{E} \perp d\vec{l}$.

b) No interior: $V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, uma vez que $\vec{E} = 0$.

Conseqüentemente, em um condutor $V_A = V_B$.

ELETROMAGNETISMO

15ª Aula : DIELETRICOS

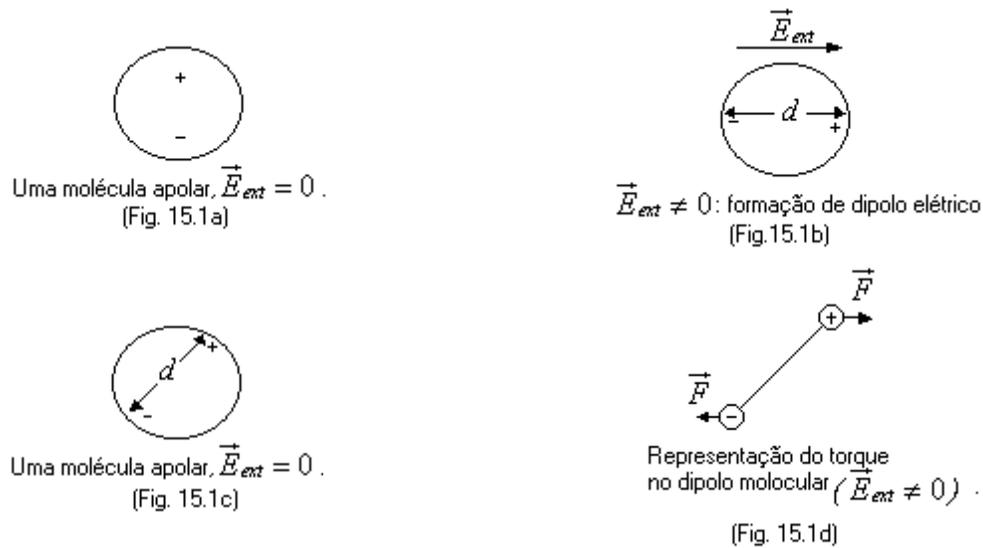
15_1 Dielétricos e o Vetor \vec{P} ;

15_2 Lei de Gauss para Dielétricos;

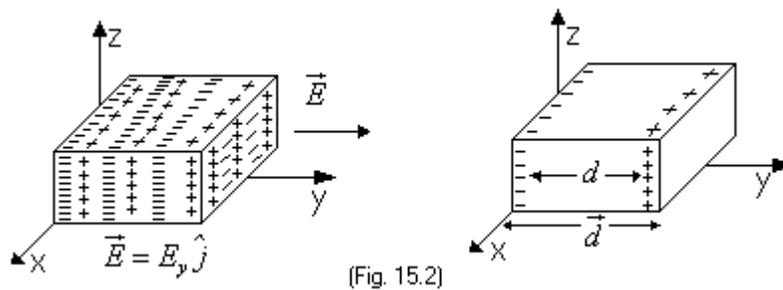
15_3 Dielétricos Perfeitos.

15_1 DIELETRICOS E O VETOR \vec{P}

Um dielétrico (ou isolante) é, por definição, um material no qual não há cargas livres em seu interior. Ao contrário do condutor, portanto, em um dielétrico as cargas estão fortemente ligadas, de modo que um campo elétrico externo provocará, no máximo, uma separação das cargas positivas e negativas (ver figura 15.1a-c).



Observe que o efeito final da aplicação de um campo externo em um dielétrico é a formação e alinhamento de dipolos elementares: quanto maior \vec{E}_{ext} , maior a quantidade ΔN de dipolos elementares formados e/ou alinhados ao campo \vec{E}_{ext} . Macroscopicamente, observa-se uma polarização do dielétrico (ver figura 15.2).



a) “Vista” macroscópica esquemática de um dielétrico na presença de \vec{E}_{ext} , polarizado.

b) Uma forma equivalente de representar um dielétrico polarizado: $\vec{p}_R = Q\vec{d}$ (\vec{d} é o vetor que liga $-Q$ a $+Q$).

Para medir o efeito do campo externo sobre o dielétrico define-se o vetor polarização \vec{P} , cujo módulo é igual à quantidade de dipolos elétricos produzidos por volume do material :

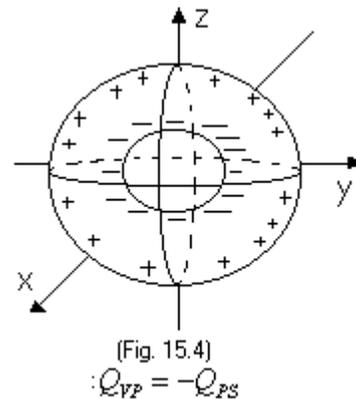
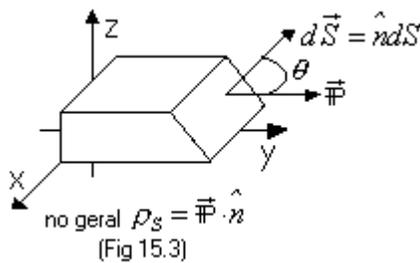
$$\vec{P} = \sum_i^N \frac{\vec{p}_i}{\Delta V} \therefore \quad (Eq. 15_1)$$

em que $\vec{p}_i = Q_i \vec{d}_i$ é o i -ésimo momento de dipolo molecular produzido na molécula, polar ou apolar. Em um material dielétrico qualquer, teremos, pois (ver figura 15.2):

$$P = \frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{NQ_p d}{Ad} = \frac{Q_{TP} A}{A} = \rho_{SP} \quad ; \quad Q_T = NQ \quad \text{ou seja,} \quad \mathbf{P} = \rho_S \quad (Eq. 15_2)$$

Isto é, o módulo de \vec{P} é igual à densidade superficial de cargas de polarização. Para uma densidade variável de cargas de polarização, $Q_p = \int_S \rho_s dS = \int P dS$ ou, em geral (ver Fig. 15.3):

$$Q_{\vec{P}} = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad \text{e, portanto} \quad \rho_s = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (Eq. 14_3)$$



Par o caso de uma polarização não uniforme, isto é, $\rho_{VP} = \rho_{VP}(x, y, z)$, haverá uma acumulação de cargas dentro do dielétrico (ver figura 14.4), sendo a carga (Q_p) dentro do material numericamente igual à carga na superfície:

$$Q_{VP} = -Q_{PS} \quad , \text{ou, da Eq. (14-3),}$$

$$\int_v \rho_{SP} dv = - \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (Eq. 15_4)$$

pelo teorema da divergência:

$$\int_v \rho_{SP} dv = - \int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dv \quad \therefore \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{SP} \quad (Eq. 15_5)$$

15_2 LEI DE GAUSS PARA DIELÉTRICOS

$$\text{A lei de Gauss é } \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{VT}}{\epsilon_0}, \quad (\text{Eq. 15}_6)$$

em que Q ((ρ_V)) diz respeito à carga (densidade de carga) total dentro da gaussiana. Suponha que a carga (densidade de cargas) total seja a soma:

$$Q_T = Q_P + Q \Leftrightarrow \rho_{VT} = \rho_{VP} + \rho_V \quad (\text{Eq. 15}_7)$$

$\rho_{VP}; Q_{VP} \Rightarrow$ cargas ligadas, formadas por polarização;

$\rho_V; Q \Rightarrow$ cargas “livres” ou excesso de cargas, que é a carga susceptível de medição.

Substituindo a Eq. (15_7) na Eq. (15_6), temos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{VP} + \rho_V}{\epsilon_0}$$

Substituindo (Eq. 15.5) em (Eq. 15_8), temos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \rho_V \quad \text{ou}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_V \quad \text{ou, ainda,}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V \quad (\text{Eq. 15}_9)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{Eq. 15}_{10})$$

A Equação (9) é a lei de Gauss na presença de dielétrico, e a Equação (10) é chamada de relação constitutiva. Para materiais ditos lineares, o vetor \vec{P} e o campo \vec{E} são proporcionais, isto é:

$$\vec{P} \propto \vec{E} \quad (\text{materiais lineares}), \text{ ou}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 x_e \vec{E} \quad (\text{Eq. 15}_{11})$$

em que a constante de proporcionalidade $k = \epsilon_0 x_e$ foi assim escolhida por conveniência. Substituindo a Eq. (15.11) na Eq. (15_10):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 x_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + x_e) \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{Eq. 15}_{12})$$

em que

χ_e é a susceptibilidade elétrica do meio;

$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ é a permissividade elétrica do meio;

$\varepsilon_R = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ é a permissividade elétrica relativa ou simplesmente constante dielétrica do meio.

Para alguns materiais (veja a tabela 15_1 abaixo), ε_R não difere essencialmente de ε_0 em ordem de grandeza.

Material	ε_R	Material	ε_R
Vácuo	1,00000	Benzeno	2,28
Hélio	1,000065	Diamante	5,7
Hidrogênio	1,00025	Sal	5,9
Ar seco	1,00054	Silicone	11,8
Nitrogênio	1,00055	Metanol	33,0
Vapor d'água	1,00587	Água	80,1

Tabela 1: ε_R obtido a 1atm e à 20°C .

ELETROMAGNETISMO

16ª Aula : **EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

16_1 Lei de Gauss para Dielétricos (revisão);

16_2 Exercícios Resolvidos.

16_1 Lei de Gauss para Dielétricos (revisão);

Vimos na última aula que a lei de Gauss na presença de dielétrico se escreve como:

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (\text{Eq. 16}_1)$$

sendo Q o excesso de cargas e ρ_v a densidade de cargas, e

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (\text{Eq. 16}_2)$$

em que \vec{D} é o vetor deslocamento elétrico e \vec{P} é o vetor polarização (momento de dipolo/volume).

Para alguns materiais, chamados de dielétricos perfeitos, existe uma relação linear entre \vec{E} e \vec{P} :

$$\vec{P} \propto \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{P} = \epsilon_0 x_e \vec{E} \quad (\text{Eq. 16}_3)$$

em que $\epsilon_0 x_e$ é a constante de proporcionalidade, escolhida assim por conveniência.

Substituindo a Eq. (16_3) na Eq. (16_2), temos:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 x_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + x_e) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E} \quad (\text{Eq. 16}_4)$$

sendo:

$x_e \Rightarrow$ susceptibilidade elétrica do meio

$\epsilon \Rightarrow$ permissividade elétrica do meio

$\epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + x_e) \Rightarrow$ permissividade elétrica relativa ou constante dielétrica

do meio. Note que para os dielétricos perfeitos da Eq. (16-4) resulta:

$$D_x = \epsilon E_x \quad ; \quad D_y = \epsilon E_y \quad ; \quad D_z = \epsilon E_z$$

EX. 01: Uma esfera condutora de raio R_1 está carregado com carga Q . Envolve-se essa esfera com um isolante também esférico de $R_2 > R_1$ e permissividade ϵ . Esboce o gráfico de \vec{D} , \vec{E} e \vec{P} em função da distância r .

Solução:

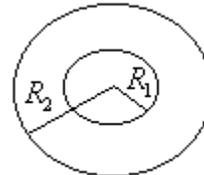
i) dentro do condutor, $E = 0$, e portanto, das Eqs.(16-3-4)

$$D = 0 \quad \text{e} \quad P = 0.$$

ii) para $R_1 < r < R_2$,

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2};$$

$$\boxed{E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2}}; \quad \boxed{P = \epsilon_0 \chi_0 E = \frac{\epsilon_0 \chi_0 Q}{\epsilon 4\pi r^2}}$$

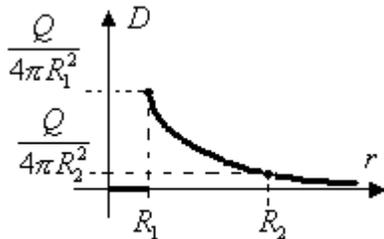


(Fig. 16.1)

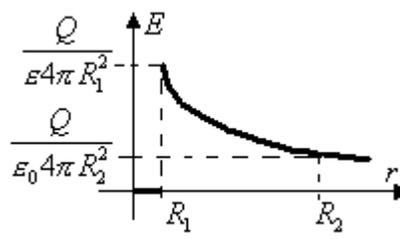
iii) para $r > R_2$:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \boxed{D = \frac{Q}{4\pi r^2}} \quad \text{e}$$

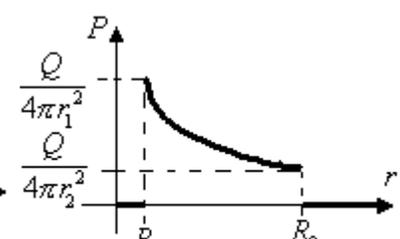
$$\boxed{E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}}; \quad \boxed{P = 0}$$



(Fig. 16.2_a)



(Fig. 16.2_b)



(Fig. 16.2_c)

RIGIDEZ DIELÉTRICA

A rigidez dielétrica é, por definição, o maior valor do campo elétrico que os dipolos elétricos de um material podem suportar sem se romper, isto é, sem liberar elétrons. A partir desse maior valor, o dielétrico passa a ser condutor. Note, entretanto, que estamos nos referindo ao campo elétrico criado **dentro** do dielétrico, que surge devido à polarização do material. Para o caso do ar, especificamente, o valor da rigidez dielétrica é da ordem de $3,0 \times 10^6$ V/m. A partir desse valor, o ar passa a ser condutor, ocorrendo o chamado *efeito corona*, em que algumas centelhas são facilmente vistas devido à descarga elétrica.

Ex.2.: Um gerador de van de Graff consiste em uma esfera metálica de raio R sendo eletricamente carregada de forma contínua. Calcule o valor da tensão que a esfera do gerador pode suportar sem atingir o efeito corona. Suponha $R = 20$ cm.

Resposta:

O potencial elétrico e o campo elétrico na superfície de uma esfera condutora são, respectivamente, $V = k \frac{Q}{R}$ e $E = K \frac{Q}{R^2}$. Portanto, o maior valor do campo elétrico ocorre para menores valores de R . Como a rigidez dielétrica do ar é $3,0 \times 10^6$ V/m Para $R = 1$ m, temos $3 \times 10^6 = \frac{KQ}{R^2} = \frac{KQ}{R} \cdot \frac{1}{R} = \frac{V}{R}$ e, portanto, $V = 3 \times 10^6$ volts.

Ex.2: Encontre o valor da polarização no interior de uma amostra em que o vetor deslocamento elétrico D vale $2,0$ pC/m².

R:

Ex.3: Sabendo que uma amostra tem 10^{23} moléculas/m³, e que ao aplicar um campo elétrico externo de 10^4 volts cada uma das moléculas produz um momento de dipolo igual a $3,0 \times 10^{-24}$ C.m, calcule a polarização.

ELETROMAGNETISMO

17ª Aula : **CAPACITORES.**

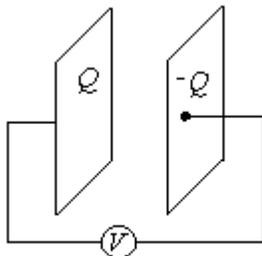
17_1 Capacitores e Capacitância

17-2 Associação de Capacitores;

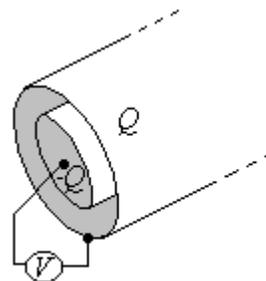
17_2 Energia no Capacitor.

17_1 Capacitores e Capacitância

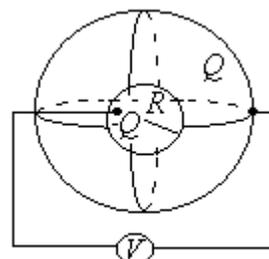
Um capacitor é um dispositivo formado por dois condutores* cuja cargas superficiais são colocadas próximas uma das outras, e são muito úteis como armazenadores de energia eletrostática. Os tipos mais comuns de capacitores são as de placas paralelas (Figura 16.3_a), o capacitor cilíndrico (Figura 16.3_b), o capacitor esférico (Figura 16.3_c).



(Fig. 16.3_a)



(Fig. 16.3_b)



(Fig. 16.3_c)

* Uma esfera isolada armazena energia ao redor e pode ser imaginada como um capacitor em que uma placa é o condutor de raio R e outra placa se situa no infinito.

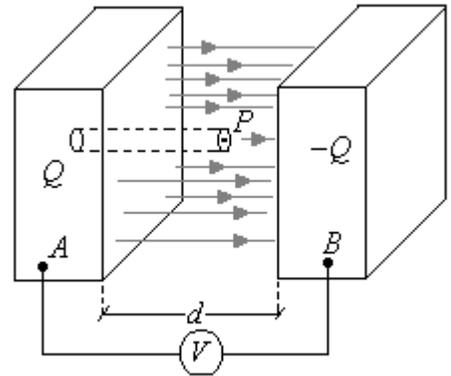
A capacitância é definida como sendo a razão entre a carga Q positiva de um capacitor carregado e a diferença V_{AB} (em valor absoluto) entre as duas placas do capacitor. É interessante notar que, como V_{AB} proporcional a Q , a capacitância, definida como

$$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad [C] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Faraday} \quad (\text{Eq. 16}_5)$$

é independente de Q e V , sendo uma constante que depende apenas do formato (geometria) do capacitor.

EX.01 Calcule a capacitância de uma capacitor de placas de 1cm^2 de área separada por uma distância $d=1\text{cm}$. A constante dielétrica do meio entre as placas é $\epsilon_R = 5$:

Solução:
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\int \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\left| -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \right|} \quad (\text{Eq. 16}_5)$$



(Fig. 16.4)

Escolhendo a gaussiana que comece dentro de uma das placas condutoras e toque um ponto entre as placas (Fig. 16.4), teremos:

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{S} \quad , \text{ como } D = \epsilon E \quad ,$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon S} \Rightarrow Q = \epsilon ES \quad (\text{Eq. 16}_6)$$

$$V_{AB} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed \quad \therefore \quad V = Ed \quad (\text{Eq. 16}_7)$$

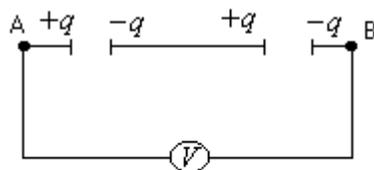
Substituindo (Eq. 16_6) e (Eq. 16_7) em (Eq. 16_5):

$$C = \frac{\epsilon ES}{Ed} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon S}{d}} \quad \text{Dos dados do problema: } \epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 5; \quad S = 1\text{cm}^2, \quad d = 1\text{cm}:$$

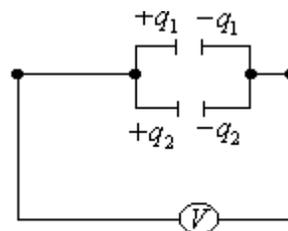
$$C = \frac{5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} (1 \cdot 10^{-2})^2}{10^{-2}} F \quad \therefore \quad C = 4,42 \cdot 10^{-13} F, \text{ ou } \boxed{C = 0,4 \text{pF}}$$

17_1 Associação de Capacitores

As capacitores podem ser dispostos em série ou em paralelo (figura 17.1):



(Fig. 17.1_a)



(Fig. 17.1_b)

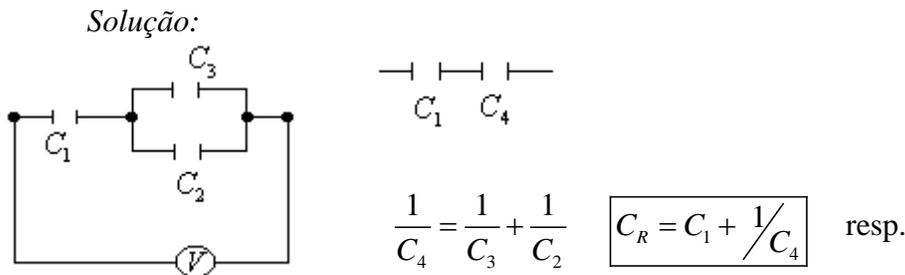
Numa associação em série de capacitores (Fig.17.1a), a tensão entre os pontos AB é $V = V_1 + V_2$ e as cargas em cada capacitor são iguais. Como $C_1 \equiv \frac{q_1}{V_1}$, $C_2 \equiv \frac{q_2}{V_2}$ e $C_R \equiv \frac{q_R}{V}$, então, dividindo $V = V_1 + V_2$ pela carga q e usando a definição de capacitância, teremos:

$$\frac{V}{q} = \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q}, \text{ logo: } \boxed{\frac{1}{C_R} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \quad (\text{Eq. 17}_1)$$

No caso de associação em paralelo (Fig.17.1b), a carga total é $q = q_1 + q_2$ e as tensões em cada capacitor são iguais. Assim, $\frac{q}{V} = \frac{q_1}{V} + \frac{q_2}{V}$ ou

$$\boxed{C_R = C_1 + C_2} \quad (\text{Eq. 17}_2)$$

EX. 01: Encontre a capacitância equivalente do circuito abaixo:



17_2 Energia no Capacitor

Quando uma diferença de potencial V é aplicada a um capacitor, a energia nele armazenada ocorre pela transferência de cargas de uma placa para outra. Como vimos, $\frac{W}{q} = V$ ou $W = qV$. Se uma carga dq infinitesimal for transferida pela tensão V , então uma energia dW infinitesimal terá sido transferida ao capacitor. Matematicamente:

$$dW = Vdq \quad (\text{Eq. 17}_3)$$

como $q = CV \Rightarrow dq = CdV$ ($C = \text{constante}$), e $dW = CVdV$ (Eq. 17_4)

integrando a Eq. (17_4) desde $W_0 = 0$ até W e desde $V_0 = 0$ até V , teremos

$$\boxed{W = \frac{CV^2}{2}} \quad (\text{Eq. 17}_5)$$

ou, substituindo $V = q/C$:

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C}} \quad (\text{Eq. 17}_6)$$

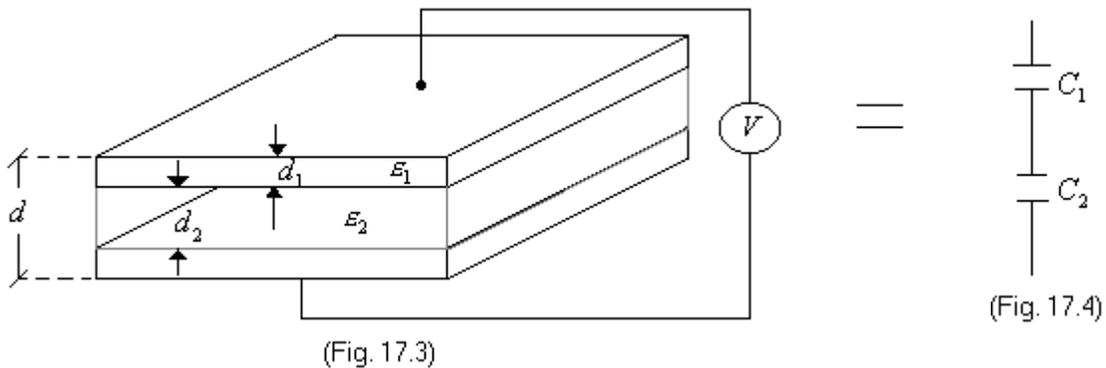
EX. 02: Mostre usando os conceitos acima, que a densidade de energia eletrostática em um capacitor de placas planas paralelas de área S e separadas de uma distância d é $\mu_i = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$.

Solução: Como $V = Ed$ e $v = Ad$, sendo v o volume do capacitor, A a área de cada placa, e d a distância entre elas, então a densidade de energia será:

$$\frac{W}{v} = \frac{CV^2}{2Ad} = \left(\frac{\epsilon A}{d} \right) \frac{V^2}{2Ad} = \frac{\epsilon V^2}{2d^2} = \frac{\epsilon}{2} E^2 \quad (\text{Resp.})$$

EX. 03: Um capacitor de placas planas paralelas de área S é preenchido com dois dielétricos, como mostra a figura abaixo. Encontre a capacitância equivalente.

Solução:



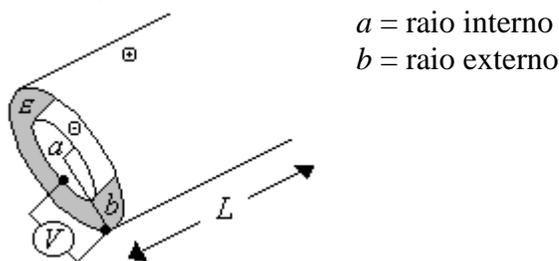
Podemos pensar nesse sistema como uma associação em série, como sugere a figura 17.4. Portanto:

$$\frac{1}{C_R} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \text{com } C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1} \text{ e } C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{d_2} \therefore$$

$$\frac{1}{C_R} = \frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S} = \frac{1}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

EX. 02: Um capacitor de placas cilíndricas concêntricas, longo (ver figura 17.3) é preenchido com um dielétrico de permissividade ϵ . Encontre sua capacitância.

Solução:



$L =$ comprimento $L \ll b$

$$C = \frac{q}{V} \quad ; \quad V_{ab} = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Eq. 17}_7)$$

O campo E pode ser obtido da lei de Gauss:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow D(2\pi\rho)L = q \quad , \quad q = \rho_L L$$

$$D = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \Rightarrow E = \frac{\rho_L}{2\varepsilon\pi\rho} \quad , \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \frac{\rho_L}{2\varepsilon\pi\rho} \rho \quad (\text{Eq. 17}_8)$$

Substituindo a Eq. 17_8 na Eq. 17_7, temos:

$$V_{AB} = -\int_b^a \frac{\rho_L}{2\pi} \rho \cdot d\rho \rho = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \int_b^a \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{a}{b}$$

$$V_{AB} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\rho_L L}{\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln \frac{b}{a}} \quad (\text{Resp.})$$

ELETROMAGNETISMO

18ª Aula : **FORÇA DE LORENTZ E LEI DE BIOT-SAVART.**

18_1 Corrente elétrica e Campo Magnético;

18_2 Força de Lorentz;

18_3 Força Magnética em Condutores;

18_4 Campos Magnéticos Estacionários e a Lei de Biot-Savart

18_1 Corrente Elétrica e Campo Magnético

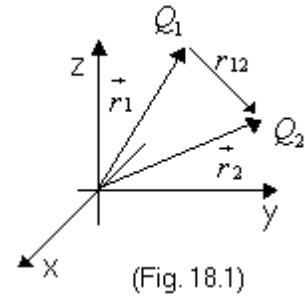
Até agora consideramos apenas situações de cargas (discretas ou contínuas) estáticas, onde predominam a força de Coulomb (figura 18.1).

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12}, \quad \hat{r}_{12} = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

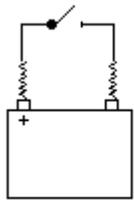
a partir da qual obtivemos: $\vec{E}(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12}$

que é o campo elétrico em \vec{r}_2 criado por Q_1 situada em \vec{r}_1 , e

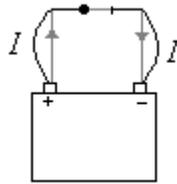
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \rho_L / \epsilon_0 \quad (\text{lei de Gauss})$$



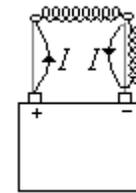
Imagine agora a seguinte experiência (ver figura 18.2):



(Fig. 18.2_a)



(Fig. 18.2_b)



(Fig. 18.2_c)

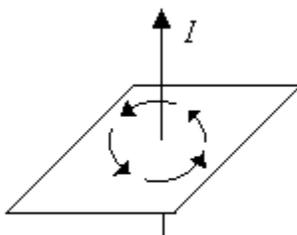
a) circuito desligado

b) corrente em direções opostas: Força de repulsão

c) corrente na mesma direção: Força de atração

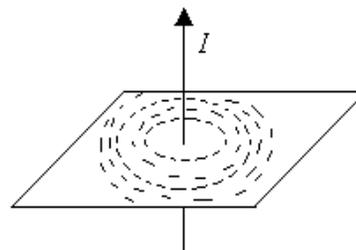
Se colocarmos uma carga de teste Q , em repouso, próxima ao fio das Figs. (18.2_a-c), veremos que ela não experimenta nenhuma força: os fios estão neutros, apesar do movimento de cargas (corrente elétrica). Entretanto, se posicionarmos uma bússola próxima aos fios das Figs.(18.2_b-c), veremos a agulha apontar numa dada direção. Essa força, de natureza magnética, surge sempre que há cargas em movimento, ainda que o fio condutor esteja neutro. Portanto, diferentemente de cargas estacionárias que produzem um campo elétrico eletrostático \vec{E} , cargas elétricas em movimento produzem - além de \vec{E} - um campo magnético \vec{B} .

Experiências com agulhas suficientemente pequenas e limalhas de ferro colocadas próximas a um fio pelo qual passe uma corrente I mostram a seguinte configuração para as linhas de força do campo magnético – Figs. (18.3a-b):



(Fig. 18.3_a)

a) Conjunto de agulhas próximas a um fio conduzindo corrente



(Fig.18.3_b)

b) Limalhas próximas a um fio conduzindo corrente.

As agulhas e as limalhas de ferro dão uma pista de como as linhas de força do campo magnético estão dispostas em torno do fio. Por convenção, ao segurar um fio de modo que o polegar direito aponte no sentido da corrente, os outros dedos girarão no sentido do campo magnético.

18_2 Força de Lorentz

Seja a Fig. 18.4, abaixo. Analisando a direção do campo \vec{B} no qual está imerso o fio da direita, que chamaremos de fio “teste”, a direção da velocidade \vec{v} das cargas que se movimentam dando origem à corrente no fio teste, e a direção da força experimentada no fio teste, veremos a seguinte configuração:

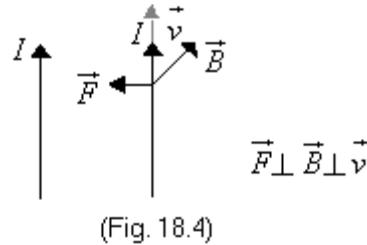


Fig. 18.4: Configuração de $\vec{F}, \vec{B}, \vec{v}$ para correntes de mesmo sentido: esses três vetores são perpendiculares entre si.

Note, da Fig. (18.4), acima, que $\vec{F} \perp \vec{v} \perp \vec{B}$, sendo fácil imaginar um produto vetorial entre eles. De fato, a força proposta por Lorentz e que tem resistido aos testes experimentais, considerando uma carga Q com velocidade \vec{v} na presença de um campo magnético \vec{B} é:

$$\vec{F}_{mag} = Q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Se além do campo \vec{B} houver ainda um campo elétrico \vec{E} próximo da partícula que se movimenta com velocidade \vec{v} , a força resultante é a soma vetorial

$$\vec{F} = \vec{F}_{mag} + \vec{F}_{elet} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \text{ chamada de força de Lorentz.}$$

18_3 Força Magnética em Condutores

Como sabemos, a corrente elétrica é medida em Ampère, que é a taxa de variação das cargas elétricas. Em um fio, a quantidade de carga Q está relacionada à densidade dos portadores ρ_L por $dQ = \rho_L dl$ portanto,

$$I = \frac{dQ}{dt} = \rho_L \frac{dl}{dt} = \rho_L v \Rightarrow I = \rho_L v$$

A força em um pedaço de fio contendo um elemento de carga dQ é, portanto,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{mag} &= \int dQ(\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \int \rho_L dl(\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \int \rho_L v(d\vec{l} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Essa última igualdade é possível porque v e dl têm o mesmo sentido. Logo:

$$\boxed{\vec{F}_{mag} = \int I(d\vec{l} \times \vec{B})}$$

Para um fio de comprimento l e corrente uniforme I imerso em um campo \vec{B} também uniforme, da equação acima resulta:

$$\boxed{\vec{F}_{mag} = I(\vec{l} \times \vec{B})}$$

18_4 CAMPOS MAGNÉTICOS ESTACIONÁRIOS E A LEI DE BIOT-SAVART

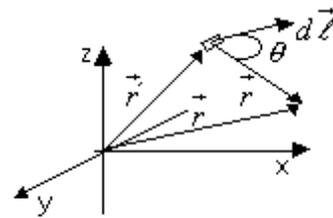
Vimos que a corrente elétrica circulando em um fio produz um campo magnético. Se a corrente for constante, isto é, não variar no tempo, o campo \vec{B} será estático, isto é, não mudará com o tempo. A lei de Biot-Savart é uma lei experimental que descreve o campo \vec{B} produzido por uma corrente I que circula em um condutor de comprimento ℓ (ver figura 18.5). De acordo com essa lei,

$$\Delta B \propto \frac{I \Delta \ell \sin \theta}{R^2} \quad ; \quad [B] = \text{tesla (T)} \quad \text{ou, ainda:}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^2} \quad ,$$

sendo $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, e portanto,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int I \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



(Fig. 18.5)

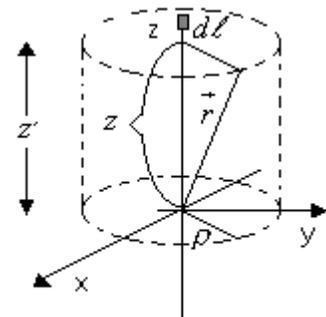
Note que \vec{B} depende de como definiremos I , e que:

- 1 – A integração é feita ao longo do caminho da corrente I ;
- 2 – $d\vec{\ell}$ é um elemento diferencial do fio que aponta no sentido de I ;
- 3 – $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ é o vetor que liga $d\vec{\ell}$ ao ponto P localizado por \vec{r} (onde se quer calcular \vec{B});
- 4 – θ é o ângulo entre $d\vec{\ell}$ e \vec{R} .
- 5 – μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, e vale, por definição (veja a aula seguinte), $4\pi \times 10^{-7} \text{ Henry/metro (H/m)}$.

Note, então, que μ_0 não é propriamente uma constante de proporcionalidade, já que depende da definição de corrente elétrica, como veremos adiante. A lei de Biot-Savart é o análogo em magnetostática da lei de Coulomb para eletrostática.

EX. 01: Encontre \vec{B} a uma distância ρ de um fio longo, reto, conduzindo uma corrente constante e uniforme I .

R: suponha a corrente no sentido positivo do eixo z , como Mostra a Fig.(18.6):



(Fig. 18.6)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\ell} I \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

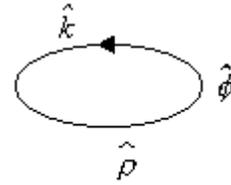
$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}$$

$$\vec{r}' = z' \hat{k} \quad ; \quad d\vec{\ell} = dz' \hat{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \rho \hat{\rho} + (z - z') \hat{k} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = [\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{1}{2}} \therefore$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\ell} \frac{dz' \hat{k} \times [\rho \hat{\rho} + (z - z') \hat{k}]}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

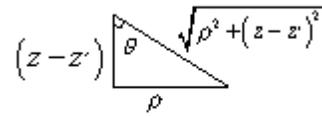
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz' \rho \hat{\phi}}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$



(Fig. 18.7)

Da Fig.(18.8):

$$\frac{z - z'}{\rho} = \cot \theta \quad ; \quad \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} = \sin \theta \therefore$$



(Fig. 18.8)

$$dz' = -\rho \cos \sec^2 \theta d\theta \quad ; \quad \cos \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \phi \int \frac{(-\rho \cos \sec^2 \theta d\theta) \rho}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \times \frac{\rho}{\rho}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \phi \int \cos \sec^2 \theta \sin^3 \theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \phi \int \sin \theta d\theta$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \phi \left[\frac{(z - z')}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \right] \Bigg|_{z' \rightarrow -\infty}^{z' \rightarrow +\infty}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \hat{\phi}} \quad (\text{resp.})$$

ELETROMAGNETISMO

19ª Aula : LEI DE AMPÈRE.

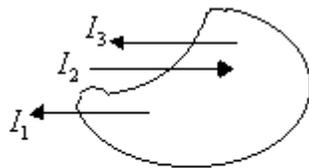
- 19_1 Lei de Ampère;
- 19_2 Corrente Elétrica;

19_1 LEI DE AMPÈRE

A lei de Ampère está para lei de Biot-Savart assim como a lei de Gauss está para a lei de Coulomb. Veremos que em muitos exemplos em que há simetria, a lei de Ampère será mais útil do que a lei de Biot-Savart.

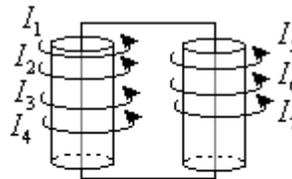
A lei de Ampère estabelece que a circulação de \vec{B} (isto é, a integral de linha num percurso C fechado) é proporcional à corrente “enlaçada” pelo percurso fechado (ver Fig. 19.1):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \propto I \quad \Rightarrow \quad \text{Lei de Ampère}$$



$$I = \sum_{n=1}^3 I_n$$

(Fig. 19.1_a)

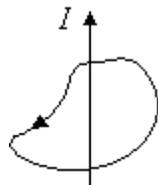


$$I_{\mathcal{E}} = \sum_{n=1}^7 I_n$$

(Fig. 19.1_b)

Para encontrar a constante de proporcionalidade, apliquemos a lei de Ampère a um fio infinito. Vimos na aula anterior que o campo magnético produzido por uma corrente I constante vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (\text{Eq. 19_1})$$



(Fig. 19.2)

Escolhendo um percurso arbitrário (Fig. 19.2) e escolhendo o elemento de caminho em coordenadas cilíndricas, isto é,

$$d\vec{\ell} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{k}, \quad (\text{Eq. 19_2})$$

e fazendo a circulação no sentido de \vec{B} :

$$\oint_C^r \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C^r \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi} \cdot (d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{k})$$

$$\oint_C^r \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi, \quad \text{ou, ainda}$$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I} \quad \text{Lei Ampère (Eq. 19_3)}$$

Note da Eq.(19-3) que a circulação de \vec{B} não depende do caminho escolhido. Essa é a essência da lei de Ampère. Embora tenhamos usado um fio reto, ela é válida qualquer que seja o formato do condutor. Caso o condutor tenha formato irregular, poderá não haver simetria e, nesse caso, embora permaneça válida, a lei de Ampère na forma integral pode não ser útil, sendo necessário usar a lei de Biot-Savart. Note que:

- i. $d\vec{\ell}$ é um percurso arbitrário, devendo ser escolhido de modo que B permaneça constante ao longo do percurso;
- ii. O sentido da circulação (integração) é escolhido pela regra da mão direita: se o polegar estiver estendido ao longo da corrente I , os demais dedos indicarão o sentido de \vec{B} e, portanto, do caminho de integração;
- iii. I é a corrente resultante enlaçada pelo percurso.

EX. 01: Um condutor cilíndrico, longo, de raio b (ver Fig. 19.3), é atravessado por uma corrente I uniforme. Calcule B para a) $0 \leq \rho \leq b$ b) $\rho \geq b$. Faça o gráfico $B \times \rho$.

Solução: Note que, como I é uniforme, então I enlaçada é proporcional à área $J = \frac{I}{A} = \text{constante}$.

a) $\rho > b$ Seja ρ o raio do circuito fechado ou "amperiano" (Fig. 19.3). Então

$$\frac{I}{\pi b^2} = \frac{I_E}{\pi \rho^2} \Rightarrow I_E = \frac{\rho^2}{b^2} I$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_E \Rightarrow \int B d\ell = \mu_0 \frac{\rho^2}{b^2} I$$

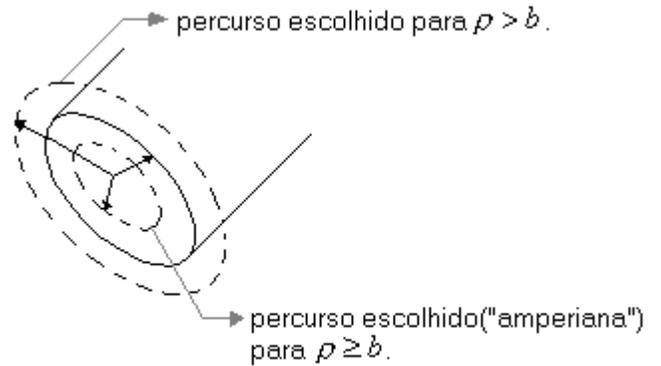
ou $B(2\pi\rho) = \mu_0 I \frac{\rho^2}{b^2} \therefore$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi b^2}} \quad \rho \leq b$$

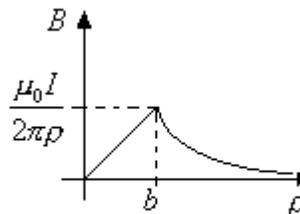
b) $\rho \geq b$: $I_E = I$

$$\int B d\ell = \mu_0 I \Rightarrow B(2\pi\rho) = \mu_0 I \quad \text{ou}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}}$$



(Fig. 19.3)



(Fig. 19.4)

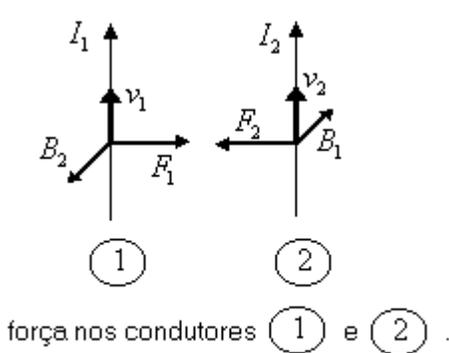
19_2 Definição de Corrente Elétrica.

A corrente é assim definida: “1 Ampère (1A) é a corrente elétrica que, percorrendo dois condutores idênticos separados de 1 m, produz uma força magnética por unidade de comprimento igual a $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$.”

Essa definição, arbitrária, nos permite agora calcular o valor de μ_0 . Lembrando que a força magnética em um condutor vale

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (\text{Eq. 19}_4)$$

para dois condutores teremos (ver figura 19.5):



(Fig. 19.5)

$$|F_1| = I_2 \ell_2 B_1 = I_2 \ell_2 \frac{(\mu_0 I_1)}{2\pi\rho} \quad \text{ou}$$

$$\frac{F_2}{\ell_2} = \frac{I_2 I_1}{2\pi\rho} \mu_0 \quad (\text{Eq. 19}_6)$$

Da definição de corrente: se $I_2 = I_1 = 1\text{A}$, $\rho = 1\text{m}$ ∴

$$\frac{F_2}{\ell_2} = \frac{\mu_0}{2\pi\rho} = 2 \times 10^{-7} \therefore \boxed{\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}} \quad (\text{Eq.}$$

Note que o valor de μ_0 depende de como a corrente é definida. Assim, esse procedimento é análogo a atribuírmos a μ_0 o valor arbitrário $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, e, a partir desse valor, ajustar a corrente para obter o valor da força/comprimento igual a $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$. É nesse sentido que dissemos anteriormente não ser a permeabilidade magnética uma constante de proporcionalidade, ao contrário da constante de Coulomb na eletrostática.

ELETROMAGNETISMO

20ª Aula : LEI DE AMPÈRE NA FORMA DIFERENCIAL E O TEOREMA DE STOKES

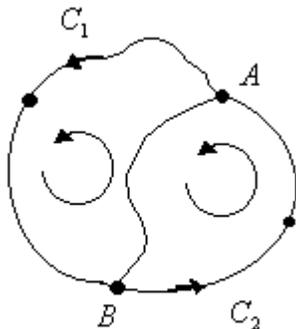
- 20_1 Introdução
- 20-2 O Teorema de Stokes
- 20-3 Lei de Ampère na Forma Diferencial
- 20-4 Exercícios

20_1 Introdução

Analogamente ao que acontece com a lei de Coulomb, em problemas em que não há simetria a forma integral da lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = I, \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Eq. 20}_1)$$

em que I é a corrente enlaçada pelo circuito C , não será de muita utilidade, sendo mais útil a sua forma diferencial. Para obter a lei de Ampère na forma diferencial, vamos calcular



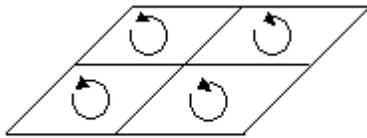
(Fig. 20.1)

a circulação de \vec{B} (Eq. 20_1) em um percurso retangular infinitesimal. Antes de fazer isso, porém, note que, da figura 20.1, a circulação pelo percurso externo é a soma das duas circulações:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

pois na integral pelo percurso C_1 a integral é feita de B até A ; e na integral pelo percurso C_2 essa mesma integral é anulada pela integração de A até B .

Assim, dado um percurso fechado qualquer, podemos dividi-lo em malhas infinitesimais (figura “20.2”) cujas superfícies são aproximadamente planas e cuja circulação resultante envolve apenas o perímetro externo do percurso fechado. Essas considerações são muito importantes para a derivação da lei de Ampère na forma diferencial.

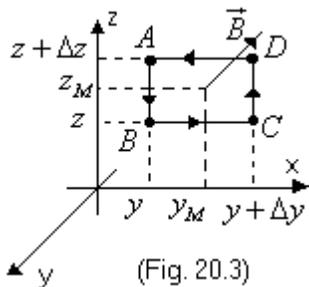


(Fig. 20.2)

Fig.20-2: Uma superfície arbitrária pode sempre ser dividida em percursos elementares. Note que a circulação resultante só envolve o perímetro externo da figura arbitrária.

20_2 O Teorema de Stokes

Consideremos um percurso infinitesimal retangular C_i em uma região onde exista um campo \vec{B} . É claro que a circulação de \vec{B} não deve depender de como o sistema de coordenadas é escolhido. Para facilitar, portanto, vamos escolher um sistema de coordenadas tal que o percurso retangular esteja no plano yz (Fig. 20.3):



(Fig. 20.3)

$$d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x(x, y, z)\hat{i} + B_y(x, y, z)\hat{j} + B_z(x, y, z)\hat{k}$$

sejam $(0, y_M, z_M)$ as coordenadas do centro do retângulo

Fig. 20-3. A circulação de B nesse retângulo será

$$\oint_{C_i} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Como o percurso é infinitesimal, vale a aproximação

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B B_z(x, y, z) dz \cong B_z(0, y, z_M) \int_A^B dz$$

Em que mantivemos y constante e tomamos o valor de z no centro do retângulo. Essa aproximação tenderá ao valor exato quando o retângulo for infinitesimal. Portanto,

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \cong -B_z(0, y, z_M) \Delta z \tag{Eq. 20_1}$$

Igualmente, teremos para os outros caminhos

$$\int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \cong B_y(0, y_M, z) \Delta y \therefore \tag{Eq. 20_2}$$

Em que novamente fizemos a aproximação tomar o valor de y no centro do retângulo (z permanece constante). Para os outros percursos, teremos:

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \cong B_z(0, y + \Delta y, z_M) \Delta z \tag{Eq. 20_3}$$

$$\int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \cong -By(0, y_M, z + \Delta z) \Delta y \quad (\text{Eq. } 20_4)$$

Somando (Eq. 20_1) + (Eq. 20_2) + (Eq. 20_3) + (Eq. 20_4):

$$\begin{aligned} \oint_{C_i} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \cong & [B_z(0, y + \Delta y, z_M) - B_z(0, y, z_M)] \Delta z + \\ & - [By(0, y_M, z + \Delta z) - By(0, y_M, z)] \Delta y \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo o lado direito dessa última equação por Δy e Δz , respectivamente, e em seguida tomando o limite Δy e $\Delta z \rightarrow 0$, teremos agora a igualdade:

$$\oint_{C_i} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \left\{ \frac{[B_z(0, y + \Delta y, z_M) - B_z(0, y, z_M)]}{\Delta y} \Delta z \Delta y - \frac{[By(0, y_M, z + \Delta z) - By(0, y_M, z)]}{\Delta z} \Delta y \Delta z \right\}$$

que, pela definição de derivada parcial, ainda podemos escrever

$$\oint_{C_i} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) dydz \quad . \quad (\text{Eq. } 20_5)$$

Observe da Fig.20-3 que $d\vec{S} = dydz\hat{i}$ e que, na Eq.(20-5) o termo $\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$ é a componente do rotacional na direção x . Portanto, a equação 20_5 pode ainda ser escrita como:

$$\oint_{C_i} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right)_x dS_x = (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{Eq. } 20_6)$$

em que dS é o elemento de área delimitada pelo percurso infinitesimal C_i . Para um percurso não-infinitesimal, basta dividi-lo em percursos infinitesimais e somar todos eles. O resultado será, lembrando que os percursos internos se cancelam – ver Fig. 20-1 e 20-2 – o chamado *teorema de Stokes*:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \quad , \quad (\text{Eq. } 20_7)$$

em que C é o perímetro e S é a área do percurso arbitrário C . Embora deduzida aqui para o caso do campo magnético, esse teorema é válido para *qualquer* campo vetorial. Esse teorema nos diz que a circulação de um campo vetorial em um percurso C é igual ao fluxo do rotacional na área delimitada por esse percurso.

20_3 Lei de Ampère na forma diferencial

Para obter a lei de Ampère na forma diferencial, lembremos que $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$, em que \vec{J} é a densidade de corrente elétrica. Usando a (Eq. 20_7) teremos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} \therefore$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}} \quad \text{Lei de Ampère (diferencial)} \quad (\text{Eq. 20}_8)$$

20 – 4 Exercícios

Dado $\vec{B} = (2xy\hat{i} + 4xz\hat{j} + 5k)$ calcule $\vec{J}(0,0,1)$

Solução:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xy & -4xz & 5 \end{vmatrix} = 4x\hat{i} - (4z + 2x)\hat{k}$$

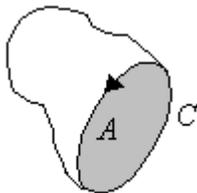
$$\vec{J} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{-4\hat{k}}{\mu_0} \quad (\text{resp.})$$

EX. 02: Expresse a lei de Kirchoff $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ na forma diferencial.

Solução:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \therefore$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \quad (\text{resp.})$$



(Fig. 20.4)

Nota: No teorema de Stokes, a área é aberta, como por exemplo na Fig. (19.4).

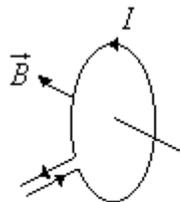
ELETROMAGNETISMO

22ª Aula : **TORQUE EM DIPOLOS MAGNÉTICOS.**

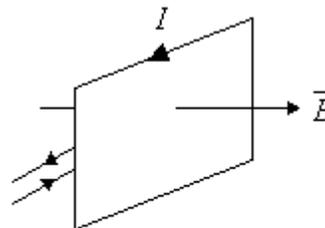
- 22_1 Dipolo Magnético na Presença de Campo Magnético;
- 22_2 Nota Sobre Força e Torque;

22_1 Dipolo Magnético na Presença de Campo Magnético

Um dipolo magnético é, por definição, qualquer circuito fechado pelo qual circula uma corrente elétrica I_0 (fig. 22.1).



Dipolo elétrico circular e \vec{B} induzido.
Fig. 22.1_a



Dipolo elétrico retangular e \vec{B} induzido.
Fig. 22.1_b

Note que a corrente I produz um campo \vec{B} , indicado na figura 22.1, acima. Suponhamos que um dipolo magnético seja colocado na presença de um campo \vec{B}_{ext} externo e orientado ao longo de $+y$, como indica a figura 22.2, abaixo:

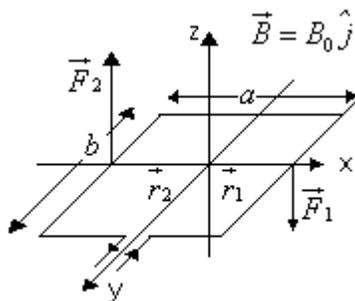


Fig. 22.2

Fig. 22.2: Um dipolo magnético colocado na presença de um campo magnético externo \vec{B} . A face da espira está voltada para k , campo \vec{B}_{ext} aponta para $+j$.

$$\vec{F}_1 = IbB\vec{k}$$

Como $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ para uma corrente I constante, então as duas forças $\vec{F}_1 = -IbB\vec{k}$ e $\vec{F}_2 = IbB\vec{k}$ darão origem a um torque que tende a alinhar a área da espira com o eixo y ; nos lados paralelos a y não haverá força magnética, pois $\vec{\ell} \parallel \vec{B}$. O torque resultante em relação à origem (centro da espira) será, portanto – veja Fig.22.2:

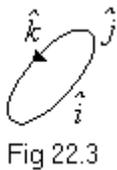


Fig 22.3

Fig. 22.3: A regra cíclica usando os versores cartesianos.

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{a}}{2} \times \vec{F}_1 + \left(\frac{-\vec{a}}{2} \right) \times (-\vec{F}_1) = \vec{a} \times \vec{F}_1 = (Iab\vec{j} \times B\vec{k})$$

(Eq 22_4)

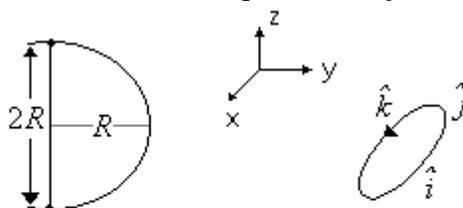
ou ainda, definindo o momento de dipolo magnético como $\vec{m} = I\vec{A}$, $A = ab$, teremos:

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

(Eq 22_2)

Note a analogia com o torque em dipolo elétrico na presença de \vec{E} : $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$, sendo $\vec{p} = q\vec{d}$ o momento de dipolo elétrico. Analisando a (Eq 22_2), vemos que o torque será máximo quando $\vec{m} \perp \vec{B}$ é nulo quando \vec{m} e \vec{B} forem paralelos. podemos, portanto, concluir que o torque de um campo \vec{B} tende a alinhar a espira de corrente com a sua direção. Em outras palavras, quando um dipolo magnético é colocado na presença de um campo magnético, ele sofre um torque no sentido de alinhar o momento \vec{m} com o campo \vec{B} , da mesma forma que como o campo \vec{E} tende a alinhar o momento de dipolo elétrico \vec{p} com a sua direção.

EX.01: Uma espira semi-circular (fig 22.3) é percorrida por uma corrente $I = 50A$, e está situada numa região onde o campo vale $\vec{B} = 0,8\hat{i} - 0,7\hat{j} + \hat{k}$ T. Encontre a) a força sobre o lado retilíneo b) o torque em relação ao centro do lado retilíneo.



Dipolo magnético semi-cículo, $R = 4cm$.

Fig 22.4

Solução:

$$\text{Seja } \begin{cases} \vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{\tau} = m \times \vec{B} \\ \vec{\tau} = r \times \vec{F} \end{cases}$$

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} = I l \hat{j} \times (0,8\hat{i} - 0,7\hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{F} = 50 \times 8 \times 10^{-2} \hat{j} \times (0,8\hat{i} - \hat{k}) + \hat{j} \times \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{F} = 4\hat{i} - 3,2\hat{k}} \quad (\text{Resp. a})$$

$$\vec{r} = m \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{m} = IA \left(-\frac{\$}{k} \right) = 50\pi \frac{(4 \times 10^{-2})^2}{2} \left(-\frac{\$}{k} \right)$$

$$\vec{m} = -0,25\$\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = -0,085\$\hat{i} + 0,100\$\hat{j} \text{ Nm}} \quad (\text{Resp. b})$$

EX. 02: Mostre que o dipolo magnético da figura 22.5 excuta um MHS para pequenos ângulos em relação à vertical.

Solução:

Como $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$; $\tau = mB \sin\theta$, sendo θ o ângulo entre \vec{m} e \vec{B} . Além disso, $\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$, sendo I o momento de inércia da espira. Então:

$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mB \sin\theta$, o sinal negativo indica que o torque é restaurador, ou seja, ele muda de sentido quando a espira passar do ponto em que $\tau = 0$ e atua no sentido de alinhar a espira com o campo \vec{B} . Para ângulos pequenos, $\sin\theta \cong \theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mB\theta}{I} \quad , \text{ ou } \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (\text{Equação do O.H.S.})$$

com $\omega = \sqrt{\frac{mB}{I}}$ sendo $\omega = 2\pi/T$ a frequência angular do movimento harmônico simples.

22_2 Nota Sobre Força e Torque

Translação	Rotação
\vec{F}	$\vec{\tau}$
x	θ
\square $x = v = dx/dt$	\square $\theta = \omega = d\theta/dt$
$a = dv/dt = d^2x/dt^2$	$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$
m	I
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
$W = \int_{x_0}^{x_f} F dx$	$W = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \tau d\theta$
$k = \frac{1}{2}mv^2$	$k = \frac{1}{2}I\omega^2$
$P = Fv$	$P = \tau\omega$

ELETROMAGNETISMO

22ª Aula : NATUREZA DOS MATERIAIS MAGNÉTICOS: MAGNETIZAÇÃO E PERMEABILIDADE

- 22_1 Dipolo Magnético;
- 22_2 Magnetização;
- 22_3 Lei de Ampère em Meios Materiais;
- 22_4 Permeabilidade Magnética

22_1 Dipolos Magnéticos

Na aula anterior vimos que um dipolo magnético (espira de corrente elétrica) quando colocada na presença de um campo magnético externo \vec{B} sofre um torque $\vec{\tau}$ que tende a alinhar o seu momento de dipolo $\vec{m} = I\vec{A}$ com o campo \vec{B} - ver figura (22.1):

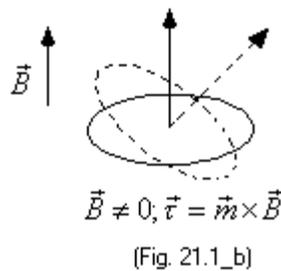
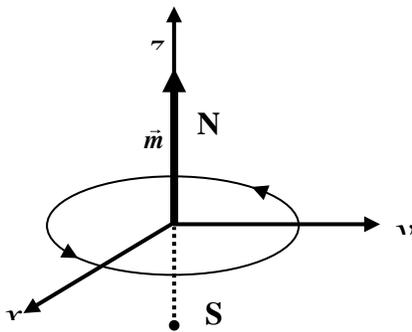
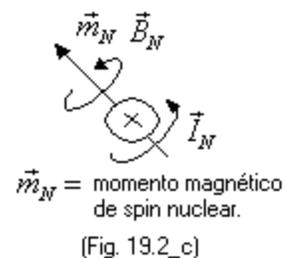
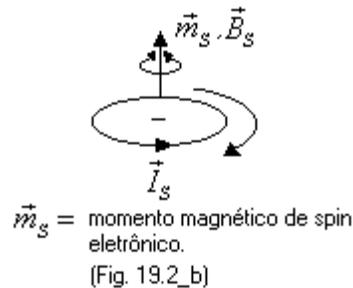
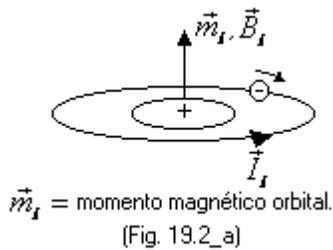


Fig. 22.1a: Uma espira de corrente elétrica forma um dipolo magnético de momento $\vec{m} = I\vec{A}$. S e N representam os polos Sul e Norte, respectivamente

Fig. 22.1b: Na presença de um campo externo \vec{B} , o momento de dipolo magnético \vec{m} tende a se alinhar com o campo externo..

Toda matéria é formada por átomos que, em um modelo rudimentar, podem ser descritos por um núcleo “positivo” ao redor do qual orbitam elétrons “negativos”. Considerando que o próprio núcleo e os elétrons podem rotacionar em torno de seu eixo, podemos visualizar o átomo e seus constituintes como dipolos magnéticos elementares, como mostra a figura 22.2:



Na figura 22.2abc $\vec{I}_\ell, \vec{I}_S, \vec{I}_N$ designam a corrente elétrica devido ao movimento orbital, de rotação do elétron e de rotação do núcleo, respectivamente. O movimento magnético de spin nuclear, por ser muito pequeno, pode ser ignorado e não contribui para as propriedades magnéticas macroscópicas do material.

Na ausência de \vec{B} (externo), todo material possui os momentos magnéticos orientados de forma aleatória em virtude da agitação térmica, de modo que o momento magnético resultante é nulo. Na presença de um campo \vec{B} , entretanto, os dipolos magnéticos atômicos (ou dipolos elementares) sofrerão, cada um, um torque no sentido de alinhar seus momentos de dipolos \vec{m} com o campo \vec{B} , produzindo um campo \vec{B}_{in} dentro do material que pode estar ou não na mesma direção e sentido do campo externo \vec{B} . Conforme o campo \vec{B}_{in} interno seja mais ou menos intenso, e dependendo do seu sentido, os materiais são classificados em (para maiores detalhes, vide bibliografia):

- i) Diamagnéticos – o campo interno é fraco e oposto ao campo externo;
- ii) Paramagnéticos – o campo interno é fraco e no mesmo sentido do campo externo;
- iii) Ferromagnéticos - o campo interno é forte e no mesmo sentido do campo externo;
- iv) Antiferromagnéticos – o campo interno é forte e no sentido contrário ao do campo externo, o que produz um momento magnético resultante nulo;
- v) Ferrimagnéticos – o campo interno é forte e no sentido contrário ao do campo externo, mas não anula o campo externo como no caso do material antiferromagnético;
- vi) Superparamagnéticos – o campo interno é mais forte que no caso do material paramagnético.

22_2 Magnetização

Para medir o efeito de um campo \vec{B} aplicado a um dado material, podemos proceder de maneira análoga ao que fizemos no caso do dipolo elétrico colocado em um campo elétrico externo, definindo um vetor \vec{M} que represente o efeito macroscópico do alinhamento dos dipolos magnético atômicos na presença de \vec{B} :

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = \frac{\sum \vec{m}_i}{\Delta V} = \frac{\text{soma momentos magnéticos atômicos}}{\text{volume da amostra}} \quad (\text{Eq } 22_1)$$

$$\text{ou, em geral, } \vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \quad (\text{Eq } 22_2)$$

22_3 Lei de Ampère em Meios Materiais

Numa região em que $\vec{B}_{ext} = \vec{B}$, em geral haverá correntes microscópicas dentro do material, resultantes do alinhamento dos momentos de dipolos elementares. A essas correntes que surgem quando o material é colocado na presença de um campo magnético

denominaremos **correntes de magnetização** I_m , para distingui-las de eventuais correntes de condução I devido aos elétrons de condução. A corrente total I_E enlaçada por um circuito arbitrário será, portanto, a soma $I_E = I + I_m$. Como:

$$M = \frac{dm}{dV}, \quad (Eq\ 22_3)$$

então, para um cilindro de área fixa A e altura $d\ell$ (fig. 22.3), teremos, uma vez que $m = I_m A$,

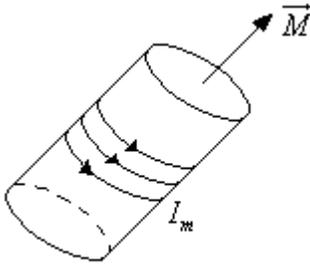


Fig. 21.3

Fig. 22-3: Um elemento cilíndrico de área A e comprimento $d\ell$ de um material colocado na presença de um campo \vec{B} . \vec{M} é o vetor magnetização resultante dentro do cilindro. Fora do cilindro, $\vec{M} = 0$ se não houver material nas adjacências do elemento.

$$M = \frac{d(AI_m)}{Ad\ell} \Rightarrow dI_m = Md\ell. \quad (Eq\ 22_4)$$

Integrando ambos os lados da Eq.(22-4) em um circuito fechado

$$I_m = \int_C Md\ell \quad \text{ou, na forma geral,} \quad I_m = \int_C \vec{M} \cdot d\vec{\ell} \quad (Eq\ 22_5)$$

Isto é, a magnetização é proporcional à corrente de magnetização enlaçada por um circuito fechado arbitrário, exatamente como na lei de Ampère. Substituindo (Eq 22_5) na lei de Ampère:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_m) = \mu_0 I + \mu_0 \int_C \vec{M} \cdot d\vec{\ell} \quad (Eq\ 22_6)$$

$$\text{ou} \quad \int_C \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{\ell} = I \quad (Eq. 22-7)$$

$$\text{definindo:} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{ou:} \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})} \quad (Eq\ 22_8)$$

a (Eq 22_7) fica:

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \quad ; \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (Eq\ 22_9)$$

que é a Lei de Ampère na presença de matéria. \vec{H} é chamado de indução magnética em alguns livros textos, de campo magnético em outros, e encontraremos ainda o uso de “vetor auxiliar H” em outros livros. Aqui o chamaremos simplesmente de “vetor \vec{H} ” para não causar confusão com o vetor \vec{B} , ao qual denominamos de campo magnético. Note que (Eq 22_9) pode ser escrita como, usando o teorema de Stokes:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{cases} \quad \text{Lei de Ampère na forma diferencial} \quad (22-10)$$

É importante destacar duas coisas. Primeiro, que a lei de Ampère na qual aparece o campo magnético \vec{B} - Eq.(22-6) permanece válida, caso em que devemos levar em conta a corrente total enlaçada pelo circuito, isto é, a soma da corrente de magnetização com a corrente elétrica. Segundo, que a forma da lei de Ampère – Eqs.(22-9,10) escrita levando em conta a presença de materiais magnéticos, é mais útil, tendo em vista que do lado direito dessas equações só aparecem a corrente elétrica e a densidade de corrente elétrica, que são as grandezas físicas geralmente mensuráveis no laboratório. Finalmente, a lei de Ampère na presença de matéria deve ser comparada com a lei de Gauss na presença de matéria, a fim que a analogia seja evidenciada.

21_4 Permeabilidade Magnética

Para os materiais classificados como *paramagnéticos* e *diamagnéticos*, vale a relação linear $\vec{M} \propto \vec{H}$, ou seja

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (\text{Eq } 22_{11})$$

$\chi_M \Rightarrow$ susceptibilidade magnética do meio

Substituindo a Eq(22_11) em (Eq 22_10):

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_M) \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (\text{Eq } 22_{12})$$

$$\text{sendo: } \begin{cases} \mu \Rightarrow \text{permeabilidade magnética do meio;} \\ \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = (1 + \chi_M) \Rightarrow \text{permeabilidade relativa} \end{cases}$$

Ex.1: Use o teorema de Stokes para obter a lei de Ampère na forma diferencial – Eq.(22-10).

Ex.2 : Dado o vetor $\vec{H} = e^{-xyz^2} \vec{i} + \ln(xyz) \vec{j} + \vec{k}$, calcule o vetor densidade de corrente elétrica.

ELETROMAGNETISMO

23ª Aula: As Correntes de Ampère e a Curva de Histerese

- 23_1 As correntes de Ampère;
- 23_2 A curva de histerese;

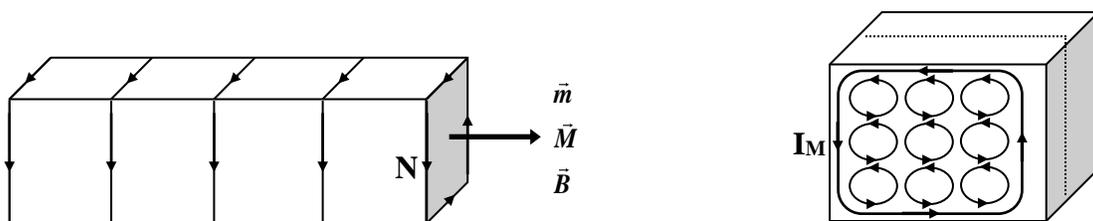
23-1 As correntes de Ampère

Até agora vimos que as fontes do campo magnético são correntes elétricas. No caso dos ímãs permanentes, contudo, não há aparentemente nenhuma corrente elétrica originando o campo magnético ao seu redor. Entretanto, na aula anterior descrevemos as propriedades magnéticas dos materiais em termos das correntes elementares, formadas pelo movimento de rotação e orbital dos elétrons em torno do núcleo (ver Tab.23-1). Vimos, ali, que qualquer material, ao ser colocado na presença de um campo magnético, sofre um torque no sentido de alinhar (ou anti-alinhar) o seu momento de dipolo magnético com o campo magnético.

Tab.23-1: Valores previstos pela mecânica quântica para a intensidade do momento de dipolo magnético elementar \mathbf{m} (A.m).

Próton	$2,0 \times 10^{-26}$
Elétron (orbital)	$9,3 \times 10^{-24}$
Elétron (spin)	$9,3 \times 10^{-24}$

De fato, para alguns materiais, como o ferro por exemplo, mesmo quando o campo externo é retirado (ou desligado) esses momentos de dipolos elementares continuam alinhados, produzindo uma magnetização residual ou remanente, conforme veremos a seguir, funcionando portanto como um ímã. A maioria dos físicos hoje acredita que a fonte do campo magnético dos ímãs permanentes são as correntes elementares, chamadas de correntes de Ampère (ver Fig. 23-1a, b), as quais por sua vez são produzidas em virtude do alinhamento quase perfeito dos momentos de dipolos elementares que compõem o ímã. A diferença, portanto, entre um ímã permanente e um ímã artificial (produzido por magnetização remanente) é que nos primeiros o alinhamento dos dipolos magnéticos elementares se dá de forma espontânea, isto é, os chamados ímãs permanentes são



encontrados “prontos” na natureza.

Fig.23-1a: correntes de Ampère na superfície de um ímã permanente

Fig.23-1b: Vista transversal do interior do ímã permanente visto na Fig.23-1a. As correntes internas se anulam

23-2 A Curva de Histerese

Um comportamento interessante que ocorre nos materiais ferromagnéticos é o fenômeno da histerese, que resulta na chamada curva de histerese ou curva $B-H$. Enrolando um pedaço de ferro em um fio e aplicando uma fem nas suas extremidades, o campo magnético dentro do pedaço de ferro cresce de forma não-linear, isto é, de forma muito intensa, atingindo um valor máximo (saturação). Ao diminuir a corrente elétrica, o campo dentro do pedaço de ferro diminui passando por valores diferentes, como veremos a seguir. A curva resultante B versus H é a curva de histerese.

Considere um núcleo de ferro em forma de toróide no qual um fio é enrolado, passando através dele uma corrente (fig. 30.1):

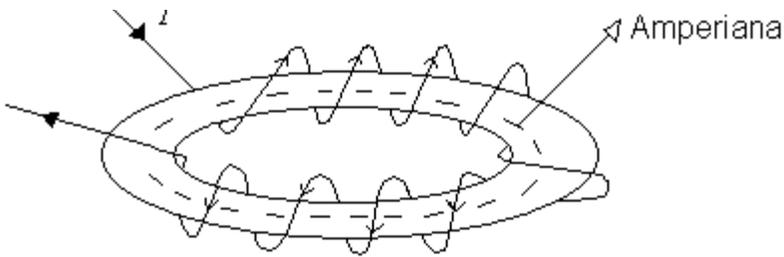


Fig 30.1

Fig. 30.1: Os campos B, H, M gerados pela corrente elétrica que percorre o fio envolvendo um núcleo de ferro em forma de um toróide ficam “canalizados” no interior do núcleo de ferro.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \quad \text{resulta} \quad H(2\pi r) = NI \quad \text{ou, ainda,} \quad H = \frac{NI}{2\pi r} \quad (23.1)$$

Sendo N o número de espiras e r o raio do toróide. Note, portanto, que H é proporcional à corrente, isto é, $H \propto I$.

Suponha agora que a corrente I da Fig. 23.1 seja aumentada aos poucos. Se inicialmente o núcleo de ferro estiver desmagnetizado, a curva experimental $B-H$ tem o seguinte aspecto (fig. 23.2):

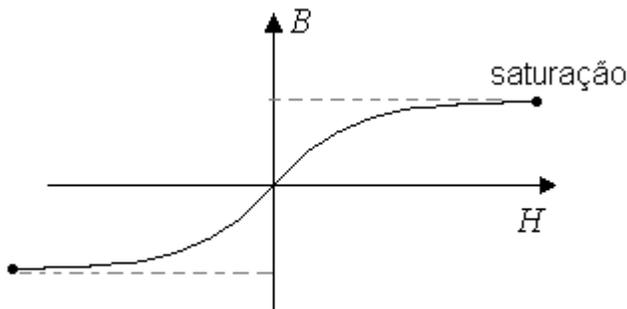


Fig 30.2_a

Figura 30.2_b: Quando a corrente I é aumentada, a curva $B-H$ indica a saturação para B . A parte inferior seria o observado se invertêssemos a polaridade da fonte, aumentando a corrente no sentido contrário

Fisicamente, essa saturação representa o máximo alinhamento dos momentos de dipolos magnéticos elementares que compõem o ferro. Suponhamos agora que, uma vez atingida a saturação, a corrente fosse diminuindo gradativamente, até se anular e então mudasse de sentido, crescendo até atingir novamente o ponto de saturação. A curva B-H teria agora o seguinte aspecto, chamada curva de histerese, Fig.23-2b:

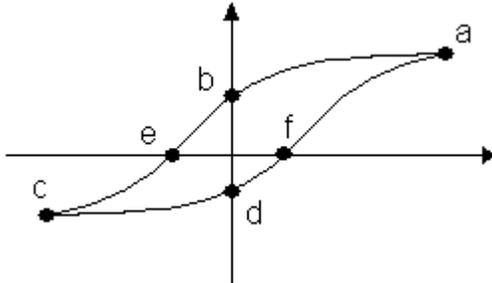


Fig. 23.2_b: Ciclo de histerese. Os pontos b,d indicam magnetização remanescente; os pontos e,f indicam uma “força coercitiva”, isto é, a força necessária para obrigar o campo B a se anular novamente.

Lembrando que $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, podemos observar da Fig. 23-2b acima que mesmo quando a corrente é desligada resultando em $H = 0$ (H é proporcional a I), o campo B não se anula, sendo igual a $\vec{B} = \mu_0\vec{M}$ - pontos b,d - indicando uma magnetização remanescente ou remanente do ferro. Por outro lado, para forçar o campo B a se anular no interior do ferro é necessário aumentar a corrente, aumentando também o campo H . O valor de H para o qual B se anula é geralmente denominado de “força coercitiva (ou coerciva)”, e vale $\vec{H} = -\vec{M}$. Note, entretanto, que esses campos não têm dimensão de força. A caracterização dessa curva para diversos materiais magnéticos determina sua aplicação tecnológica, como por exemplo, na construção de dispositivos para armazenar dados em computadores.

ELETROMAGNETISMO

24ª Aula: A LEI DE FARADAY E A LEI DE LENZ

- 24_1 Definição de força eletromotriz (fem);
- 24_2 Experimentos de Faraday; e Lei de Lenz.

24_1 DEFINIÇÃO DE F.E.M.

Antes de enunciar a lei de Faraday, uma lei eminentemente experimental como a lei de Coulomb e a lei de Biot-Savart, vamos relembrar o conceito da fem ou “força eletromotriz”:

fem : “É o trabalho por unidade de carga (\mathcal{E}) realizado por um agente (baterias, geradores, células fotoelétrica, etc.) para mover uma carga de um potencial a outro potencial mais elevado”

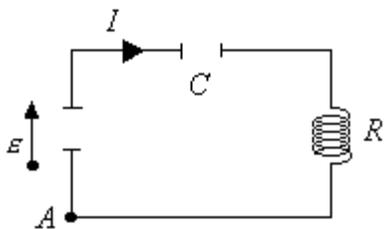


Fig 23.1

Fig. 24.1: Circuito mostrando um agente \mathcal{E} , que pode ser, por exemplo, uma pilha comum.

Assim, da definição de fem: $\mathcal{E} = \frac{dW_{AB}}{dq} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$; $V_B > V_A$ (Eq 24_1)

observe que, no circuito da fig. 24.1, usando a lei de Kirchhoff - $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$:

$$\mathcal{E} - V_C - V_R = 0, \quad \text{ou} \quad \mathcal{E} - \frac{Q}{C} - RI = 0 \quad (\text{Eq 24}_2)$$

ou seja, a soma das diferenças de potencial (incluindo a fem) em um circuito fechado é zero. Veremos a seguir uma série de experimentos realizados por Faraday que generaliza a lei de Kirchhoff ao introduzir o efeito de correntes variáveis (cargas aceleradas).

24_2 EXPERIMENTOS DE FARADAY E LEI DE LENZ

1º Experimento (fig. 24.2): Enquanto o ímã estiver em movimento, o amperímetro indicará passagem de corrente elétrica.

- i) A deflexão do ponteiro do ímã muda de sentido se a polaridade do ímã for invertida.

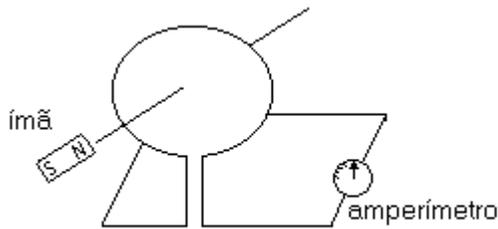


Fig. 23.2

Fig.24.2: 1º Experimento: Se o ímã estiver se movimentando e a bobina estiver se parada, o amperímetro indicará corrente.

2º Experimento (Fig.24.2): Se o ímã estiver parado, mas a bobina estiver em movimento, o amperímetro indicará corrente.

- i) A deflexão do ponteiro do amperímetro muda de sentido se o movimento da bobina mudar de sentido.

Observe dos experimentos 1 e 2 que para o amperímetro o importante é o movimento relativo. Esse é um ponto fundamental na teoria da relatividade restrita.

3º Experimento (Fig. 23.3) : No instante em que a chave é ligada ou desligada no circuito-2, e só nesse momento, o amperímetro indicará corrente no circuito-1. A deflexão que ocorre quando a chave é ligada é no sentido contrário à deflexão que ocorre quando a chave é desligada: (variação de I produz fem).

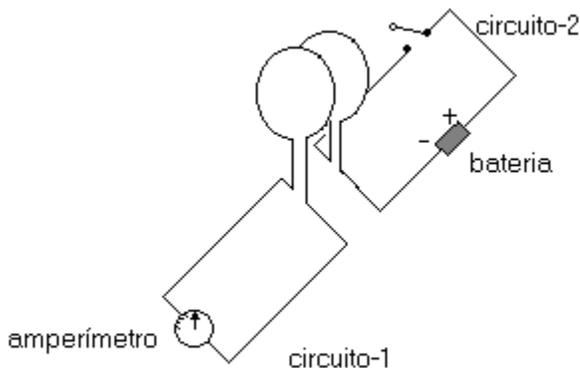


Fig 23.3

Fig. 24.3. 3º experimento de Faraday: uma fem é produzida no circuito-1 somente quando a corrente I no circuito-2 varia.

No experimento-2, em que as cargas estão em movimento, poder-se-ia esboçar uma explicação em termos da força de Lorenz $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$, em que \vec{v} é a velocidade da bobina (e portanto, dos portadores de cargas Q) e \vec{B} é o campo magnético do ímã. Entretanto, note que nos outros experimentos as cargas estão em repouso. Para explicar esse conjunto de experimentos, Faraday fez uma proposição genial:

“Uma variação no fluxo do campo magnético induz um campo elétrico, e portanto, uma fem que o origina” – Lei de Faraday .

Matematicamente, a lei de Faraday se escreve como:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (\text{Eq 24}_3)$$

em que ϕ_B é o fluxo do campo magnético e \mathcal{E} é a DDP (fem) induzida no circuito fechado. Note que, em um circuito fechado,

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Eq 24}_4)$$

O sinal negativo na Eq. 24.3 indica que a corrente induzida no circuito produz um fluxo que adicionado ao fluxo ϕ_B reduz a magnitude da fem induzida \mathcal{E} . Em outras palavras, *a corrente induzida surgirá com sentido tal que sempre vai se opor à variação do fluxo que a produziu*. Essa é a lei de Lenz, e podemos ainda enunciá-la mnemonicamente como

A natureza abomina mudança no fluxo magnético. Lei de Lenz

Note que a lei de Lenz faz referência apenas à *mudança no fluxo magnético*: se o fluxo ϕ_B estiver aumentando, a corrente induzida surgirá no sentido tal que produzirá um outro fluxo que tenderá a diminuir ϕ_B ; se o fluxo ϕ_B estiver diminuindo, a corrente induzida surgirá no sentido tal que produzirá um outro fluxo que tenderá a aumentar ϕ_B . Veja fig. 24.4 a-b, abaixo:

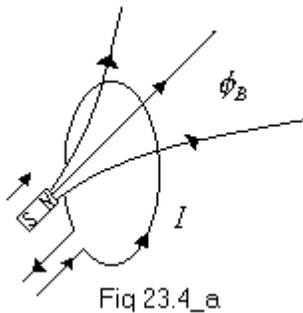


Fig. 24.4a: O pólo N do ímã se aproxima da espira, **aumentando** o fluxo na direção indicada pelas setas. A corrente induzida, obtida de acordo com a regra da mão direita, surge no sentido de gerar um outro fluxo na direção *contrária* à direção do fluxo do ímã,.

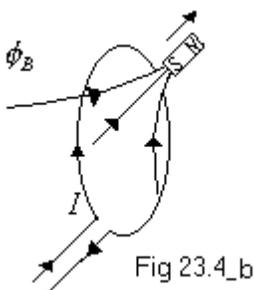


Fig. 24.4b: O pólo S do ímã se afasta da espira, **diminuindo** o fluxo magnético, que tem a direção indicada pelas setas. A corrente induzida, obtida de

acordo com a regra da mão direita, surge no sentido de gerar um outro fluxo na *mesma* direção do fluxo do ímã.

ELETROMAGNETISMO

Aula 25: MOTORES, GERADORES E TRANSFORMADORES

- 25-1 Introdução;
- 25-2 Motores;
- 25-3 Geradores;
- 25-4 Transformadores.

25-1 Introdução

A partir dos experimentos de Faraday, em que ele mostrou a possibilidade de conversão e energia mecânica em energia elétrica e vice-versa, houve um progresso tecnológico surpreendente. Nesta aula abordaremos, de maneira mais qualitativa que quantitativamente, o princípio de funcionamento dos motores, geradores e transformadores.

25-2 *Motor*

Sabemos que dois fios condutores percorridos por uma corrente elétrica exercem uma força um no outro que pode ser de atração ou repulsão, dependendo do sentido da corrente. Sabemos também que a variação do fluxo magnético através de uma espira produz uma *fem* capaz de mover os elétrons de um ponto a outro. Não é, pois, surpreendente que

algumas pessoas tenham pensado em usar esses princípios para construir motores, que são dispositivos capazes de realizar trabalho a partir das forças elétricas e magnéticas. Um exemplo de motor rudimentar é mostrado na figura abaixo, que você pode facilmente construir:

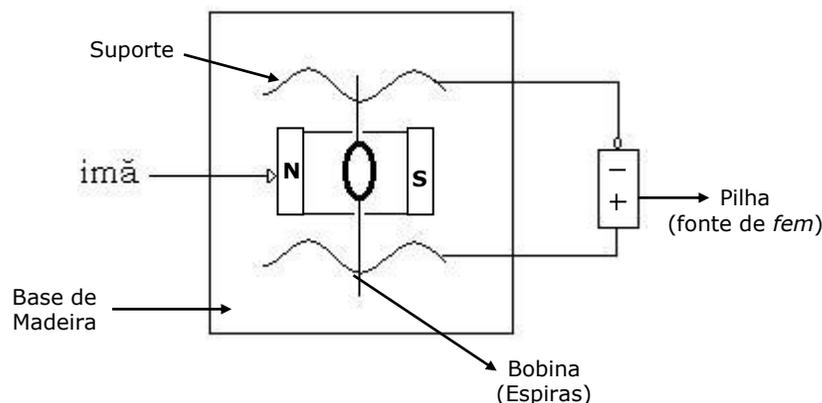


Figura 25.2: Motor rudimentar

O princípio do funcionamento desse motor rudimentar é o seguinte: a fonte de *fem* (pilha) fornece uma corrente contínua que percorre o fio enrolado (bobina); que, por estar imerso no campo magnético do ímã, fica sujeito a uma força que produz o torque e faz a bobina girar, realizando um trabalho mecânico. Embora esse tipo de motor seja muito simples, ele usa o mesmo princípio de alguns aparelhos eletrodomésticos como liquidificadores e bateadeira elétrica, e é importante para a compreensão, por exemplo, de alguns aparelhos de medida, como o Galvanômetro. No Galvanômetro, a corrente que circula na sua bobina interna, cujo valor queremos medir, produz o movimento de um ponteiro, cuja deflexão é diretamente proporcional à corrente elétrica.

25-3 Gerador

Um gerador de energia elétrica é um dispositivo que transforma energia mecânica em energia elétrica. Seu princípio de funcionamento é, pois, o contrário de um motor. Pela Lei de Faraday sempre que houver uma variação do fluxo magnético através de um circuito aparecerá, nesse circuito, uma ddp ou *fem* induzida. Podemos usar a Lei de Faraday para construir um gerador rudimentar (faça você mesmo), como mostrado abaixo:



No gerador rudimentar mostrado acima, quando o ímã é movimentado através da espira, a variação do fluxo magnético induz uma corrente elétrica no circuito. Essa corrente elétrica pode ser medida com um galvanômetro, ou verificada ligando o fio a uma lâmpada. Esse princípio é o mesmo usado na construção das grandes usinas hidroelétricas, que usam a força das águas para movimentar grandes ímãs através de bobinas, e de usinas termoelétricas, nas quais a energia térmica é usada para movimentar os ímãs através das bobinas.

25-5 Transformadores

Transformador é um dispositivo capaz de aumentar ou diminuir a voltagem elétrica, seu funcionamento básico pode ser entendido usando a Lei de Faraday. A representação esquemática de um transformador é mostrada na Figura 25.4, abaixo:

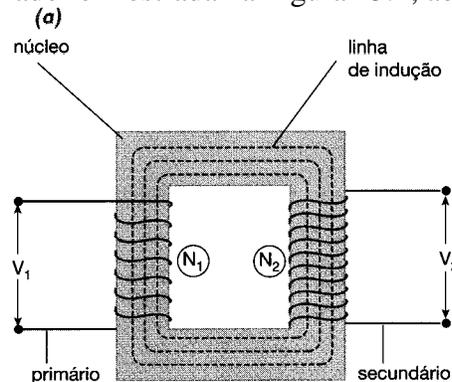


Fig. 25.4: Esquematização de um Transformador

Conforme mostra a Fig. 25.4, um transformador é constituído de duas bobinas: uma bobina de entrada, na qual chega a ddp que queremos elevar ou diminuir (isto é, transformar), também chamada de primário (V_1), e outra de saída, denominada de

secundário. Em geral, uma peça de ferro, chamado *núcleo do transformador* é usado para canalizar e intensificar o fluxo magnético através das bobinas.

De acordo com a Lei de Faraday, se uma tensão alternada V_1 é aplicada ao enrolamento primário, a corrente no circuito primário, sendo alternada, dará origem a um fluxo ϕ_2 no circuito secundário, o que, ainda pela Lei de Faraday, é responsável pela aparecimento de uma *fem* induzida no secundário (ver Fig.25-4). Usando a lei de Faraday, podemos relacionar o fluxo ϕ_1 e a tensão alternada V_1 :

$$V_1 = -\frac{d(N_1\phi_1)}{dt} = -N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (25-$$

1)

em que $N_1\phi_1$ é o fluxo total no primário e N_1 é o número de enrolamentos da bobina. A *fem* induzida, no secundário, por sua vez, será:

$$V_2 = -\frac{d(N_2\phi_2)}{dt} = -\frac{N_2 d\phi_2}{dt} \quad (25-$$

2)

sendo N_2 o número de enrolamentos do secundário. Supondo um transformador ideal, no qual não há perda de fluxo, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ e, portanto, dividindo a Eq.(2) pela Eq.(1), teremos

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad (25-$$

3)

Note, da Eq(3), que se $N_2 > N_1$, o transformador elevará a voltagem de saída V_2 ; se $N_2 < N_1$, a voltagem de saída será reduzida. Note, ainda, que em um transformador ideal a potência fornecida pelo primário deve ser igual à adquirida pelo secundário.

ELETROMAGNETISMO

24ª Aula : **O ELETROMAGNETISMO ANTES E DEPOIS DE J.C.MAXWELL.**

- 24_1 Lei de Faraday;
- 24_1.1 Lei de Faraday na Forma Diferencial;
- 24_2 O Eletromagnetismo Antes de Maxwell;
- 24_3 O Eletromagnetismo Depois de Maxwell

24_1 LEI DE FARADAY.

Vimos na última aula que os experimentos de Faraday foram resumidos na equação:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{Lei de Faraday na forma integral} \quad (\text{Eq } 24_1)$$

em que a variação do fluxo magnético ϕ_B dá origem a uma fem (DDP) $\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$. O sinal negativo indica que a fem \mathcal{E} produz uma corrente cujo fluxo magnético ϕ'_B se opõe à variação do fluxo original (lei de Lenz).

24_1.1 Lei de Faraday na Forma Diferencial.

Usando a definição de fluxo magnético

$$\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{Eq 24}_2)$$

e o teorema de Stokes

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}, \quad (\text{Eq 24}_3)$$

podemos escrever a Eq.(24-1) como:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Eq 24}_4)$$

ou $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$, que é a Lei de Faraday na Forma Diferencial. (Eq 24_5)

24_2 O ELETROMAGNETISMO A. M.

Podemos fazer um resumo das principais equações obtidas até agora:

$$1) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \underline{\text{Lei de Gauss}} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \quad (\text{Eq 24}_6)$$

$$2) \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad \underline{\text{Lei de Ampère}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{Eq 24}_7)$$

$$3) \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \underline{\text{Lei de Faraday}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Eq 24}_8)$$

Notando que as linhas de \vec{B} sempre se fecham, implicando que para qualquer superfície fechada o fluxo é nulo, podemos escrever a análogo da lei de Gauss para o campo magnético:

$$4) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Eq 24}_9)$$

O conjunto de equações Eq 24_6 - 24_9) eram a versão matemática do resultado dos experimentos de diversos cientistas que se dedicaram ao eletromagnetismo antes de Maxwell, e foi como Maxwell as encontrou ao iniciar o seu trabalho. Uma análise matematicamente mais atenta revela uma séria inconsistência nessas equações, como veremos a seguir. Veremos também como Maxwell corrigiu a inconsistência, e como passou a escrever as quatro equações acima.

24_3 O ELETROMAGNETISMO D.M.

Dado um campo vetorial \vec{F} qualquer, existe uma identidade vetorial muito conhecida, dada por: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$. (Eq 24_10)

para demonstrá-la, basta fazer $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{G}$ e tomar o divergente de \vec{G} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} ; \quad \frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \quad , \text{ etc.}$$

então:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_x}{\partial z \partial y}$$

como: $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial g} = \frac{\partial^2 F}{\partial g \partial u}$, então $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$, c.q.d.

Tomemos agora o divergente de ambos os lados das equações (Eq 24_7) e (Eq 24_8) e usemos a identidade (Eq 24_10):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) \quad (\text{Eq 24}_{11})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \quad (\text{Eq 24}_{12})$$

Note que a equação (Eq 24_12), fazendo uso da (Eq 24_9), resulta em uma identidade. O mesmo não ocorre, entretanto, com a (Eq 24_11): $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$, pois sabemos, da da equação da continuidade, que em geral:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad , \text{ Equação da Continuidade de Corrente}$$

Portanto, a (Eq 24_11) é inconsistente do ponto de vista matemático. Para resolver essa inconsistência, Maxwell propôs a adição de um termo \vec{J}_D a densidade \vec{J} na (Eq 24_11) tal que ao tomar o divergente de $(\vec{J} + \vec{J}_D)$ o resultado fosse nulo. Para descobrir esse termo, reescrevamos a equação da continuidade de corrente como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad (\text{Eq 24}_{13a})$$

e usemos a (Eq 24_6): $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$ ou,

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{Eq 24}_{14})$$

logo, o termo a ser adicionado é $\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, chamado por Maxwell de “densidade de corrente de deslocamento”, um nome, infelizmente, enganoso, uma vez que não existe uma corrente de deslocamento, como pensava Maxwell. Entretanto, por razões históricas esse nome é mantido, da mesma forma que o termo “força eletromotriz” é mantido para indicar tensão.

Substituindo \vec{J} por $\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ na (Eq 24_7), obtemos finalmente as equações fundamentais do eletromagnetismo, chamadas de **Equações de Maxwell** em homenagem às grandes contribuições de James Clark Maxwell ao eletromagnetismo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{Lei de Gauss} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \quad (\text{Eq 24}_6)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{"Lei de Gauss"} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Eq 24}_9)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad \text{Ampère + Maxwell} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Eq 24}_7)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{Lei de Faraday} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Eq 24}_8)$$

(**Equações Fundamentais do Eletromagnetismo**)

EX.01 : Escreva a) a lei de Ampère-Maxwell na forma integral, partindo da forma diferencial. b) Escreva as equações de Maxwell em termos de \vec{D} e \vec{H} .

ELETROMAGNETISMO

26ª Aula : **AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E A EQUAÇÃO DA ONDA**

25_1 As Equações de Maxwell;

25_2 As Equações de Maxwell e a Eq. da Onda;

26_1 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL.

Vimos na aula anterior que Maxwell acrescentou à lei de Ampère um termo denominado “corrente de deslocamento”, tornando a lei de Ampère consistente com os fenômenos eletrodinâmicos (cargas aceleradas). Em homenagem a Maxwell, o conjunto de equações que descrevem todos os fenômenos elétricos e magnéticos conhecidos recebem o

nome de EQUAÇÕES DE MAXWELL. Veremos agora o significado de cada uma dessas equações.

I) LEI DE GAUSS: O fluxo de \vec{E} através de uma superfície fechada é gerado pela carga dentro dessa superfície. Em outras palavras, cargas elétricas produzem campos elétricos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon_0}$$

II) LEI DE GAUSS PARA O CAMPO \vec{B} : O campo magnético é sempre dipolar, não importa quão pequeno seja o volume considerado, e o fluxo de um dipolo é sempre nulo através de qualquer superfície fechada. Em outra palavras, não existem monopolos magnéticos:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

III) LEI DE FARADAY : A variação no fluxo magnético ϕ_B (através de uma superfície aberta) produz uma *fem*. Conseqüentemente, o fluxo através de uma espira produz, nesta espira, uma corrente elétrica. O sentido da corrente elétrica é tal que o seu fluxo tende a se opor à variação do fluxo original ϕ_B :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi}{dt} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Em outra palavras, um campo \vec{B} que varia no tempo produz um campo \vec{E} não conservativo.

IV) LEI DE AMPÈRE_MAXWELL : Segundo Ampère, uma corrente elétrica produz um campo magnético. Maxwell, em adição, mostrou que uma variação no fluxo elétrico ϕ_E também produz um campo magnético:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

26_2 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL E A EQUAÇÃO DA ONDA

É bem conhecido o fato de que todos os fenômenos ondulatórios são regidos pela equação da onda:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{Eq } 25_1)$$

sendo v a velocidade de propagação da onda e ϕ a função que descreve a onda em um ponto (x,y,z) num dado tempo t isto é, $\phi = \phi(x,y,z,t)$. Naturalmente, para os casos bidimensional e unidimensional, $\phi = \phi(x,y,t)$ e $\phi(x,t)$, respectivamente. ∇^2 é o operador laplaciano

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} && (3_D) \quad \text{ou} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} && (2_D) \quad \text{ou} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} && (1_D) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{aligned}} \right\} (Eq 25_2)$$

Para mostrar que as equações de Maxwell dão origem a uma equação de onda, precisaremos da seguinte identidade vetorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (Eq 25_3)$$

Consideremos agora uma região onde não exista matéria. As equações de Maxwell (na forma diferencial) ficam:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (Eq 25_4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (Eq 25_5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (Eq 25_6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (Eq 25_7)$$

Tomando o rotacional dos dois lados da (Eq 25_6),

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

e usando a identidade (Eq 25_3) e a (Eq 25_7),

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

como $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ _ ver (Eq 25_4) :

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad (Eq 25_10)$$

Procedendo de maneira análoga com a (Eq 25_7), teremos:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad (Eq 25_11)$$

Comparando as equações (Eq 25_10) e (Eq 25_11) com a (Eq 25_1), vemos que o campo \vec{E} e o campo \vec{B} são ondas que se propagam no vácuo (região sem matéria) com velocidade $\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, que é a velocidade da luz segundo vários

experimentos de conhecimento de Maxwell. Isso o fez sugerir que a luz não era senão uma pequena faixa do espectro eletromagnético, e fez então a previsão da possibilidade da radiocomunicação muito antes da detecção das ondas eletromagnéticas!

Frequência em Hertz

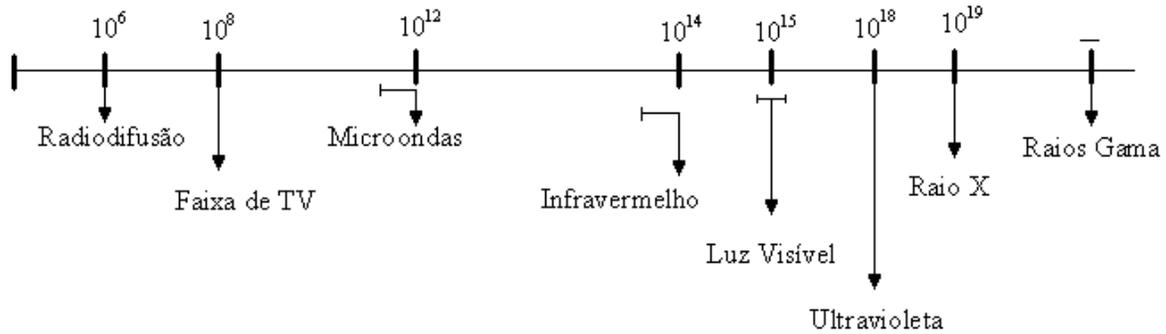


Fig 25.1

A figura acima mostra esquematicamente a frequência das ondas eletromagnéticas conhecidas. Note quão pequena é a faixa correspondente à luz visível.

As equações de Maxwell estão para o eletromagnetismo assim como as leis de Newton estão para a mecânica. É de se notar ainda que enquanto a mecânica de Newton foi completamente reformulada pela relatividade, a teoria de Maxwell se manteve intacta!

ELETROMAGNETISMO

27 Aula : ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NO VÁCUO.

- 26_1 Ondas Transversais e Longitudinais;
- 26_2 Polarização;
- 27_3 Ondas Planas monocromáticas;

27_4 Ondas Eletromagnéticas no vácuo.

27_1 ONDAS TRANSVERSAIS E LONGITUDINAIS

As ondas que se propagam em uma corda quando alguém a balança (fig. 26.1) são chamadas de ondas transversais porque o deslocamento de um ponto (ponto P na fig. 26.1) é perpendicular à direção de propagação da onda.

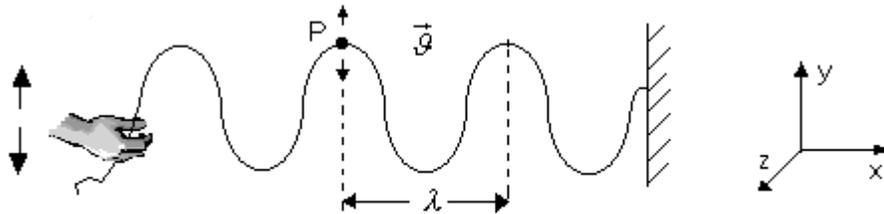


Fig 26.1

Fig 26.1: Ondas transversais em uma corda: o ponto P não se desloca para a direita ou para a esquerda, mas somente para cima e para baixo.

Por outro lado, em uma onda longitudinal, por exemplo a onda que se desloca em uma mola – Fig. 26.2 –, se olharmos para um ponto P qualquer dessa onda, veremos que ele se movimenta para a frente e para trás, isto é, na mesma direção de propagação da onda.

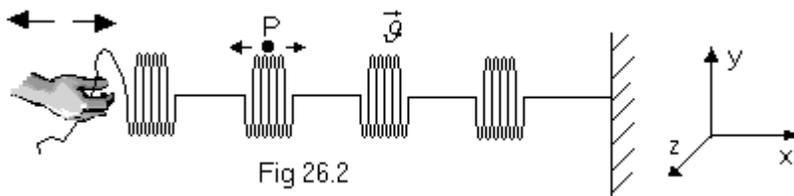


Fig 26.2

Fig. 26.2: Ondas longitudinais em uma mola: o ponto P se desloca na direção de propagação da onda.

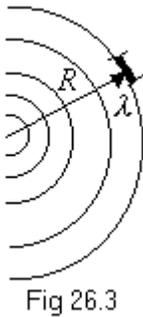
Note que para uma onda que se propaga sem deformação, a sua forma inicial deve ser preservada. Isso significa que $f(x,t) = f(x_0,t=0)$. Se a onda se propaga para a direita com velocidade constante \mathcal{G} , então $x = x_0 + \mathcal{G}t$, e portanto, $f(x,t) = f(x - \mathcal{G}t, t=0) \equiv \phi(x - \mathcal{G}t)$, que é a forma geral da função de onda que se propaga **para a direita**. Por exemplo, uma forma comum de onda é a senoidal $\phi = \phi_0 \text{sen}(kx - kvt + \delta)$, sendo ϕ_0 a amplitude da onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ o número de onda, $(kx - kvt + \delta)$ a fase da onda, e δ a constante de fase da onda.

27_2 POLARIZAÇÃO

Podemos facilmente nos certificar de que há sempre duas direções perpendiculares a qualquer linha de propagação. Por exemplo, na figura 26.1 podemos balançar a corda para cima e para baixo $(+y, -y)$, ou para a direita e para a esquerda $(+\hat{z}, -\hat{z})$. Dizemos então que essa onda possui “dois estados independentes de polarização”, um em y e o outro em \hat{z} . No caso da onda longitudinal, a direção de polarização coincide com a direção de propagação.

27_3 ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS

O termo “monocromático” significa “de uma única cor”, e é motivado pelo fato de diferentes frequências na faixa do visível estarem associadas a diferentes cores. Uma onda monocromática é uma onda de frequência definida, não necessariamente na faixa do visível. Já o termo “plana” se refere ao fato de que a onda é uniforme (não possui dependência espacial) sobre todo o plano perpendicular à direção de propagação. Embora uma onda plana seja uma idealização, em uma região suficientemente pequena toda onda pode ser considerada plana, desde que seu comprimento de onda λ seja muito menor do que a curvatura R da frente de onda (veja o ponto P da fig 26.3)

Fig. 26.3: Aproximação de onda plana: $\lambda \ll R$.

27_4 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS (EM) NO VÁCUO

Suponhamos agora uma região do espaço em que não haja matéria, sendo caracterizada pela existência de um campo elétrico, $\vec{E} = (0, E_y, 0)$, e um campo magnético, $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, ambos variáveis no tempo. Esses campos podem ter origem, por exemplo, em uma corrente alternada percorrendo uma lâmina *infinita*. Na ausência de matéria, as equações Maxwell ficam:

$$\begin{aligned} i) \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & ii) \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ iii) \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & iv) \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Da equação *i*) e de $\vec{E} = E_y(x, y, z) \hat{j}$, temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad \therefore E_y = E_y(x, z) \quad (\text{Eq 26}_1)$$

Da equação *ii*) e de $\vec{B} = B_z(x, y, z) \hat{k}$, temos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \therefore B_z = B_z(x, y) \quad (\text{Eq 26}_2)$$

Da equação *iii*), temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial x} k = -\frac{\partial B_z}{\partial t} k \quad \therefore$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 & \therefore E_y = E_y(x) & (Eq\ 26_3) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & & (Eq\ 26_4) \end{cases}$$

Finalmente, da equação iv), temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{i} - \frac{\partial B_z}{\partial x} k = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} j \quad \therefore$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 & \therefore B_z = B_z(x) & (Eq\ 26_5) \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} & & (Eq\ 26_6) \end{cases}$$

Derivando (Eq 26_4) em relação a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad \text{e, usando a Eq. (26_6):}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}$$

Analogamente, derivando (Eq 26_6) em relação a x e usando a Eq 26_4:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}} \quad (Eq\ 26_8)$$

Como já vimos na aula anterior, as (Eq 26_7) e (Eq 26_8) são as conhecidas equações da onda cuja velocidade é $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ na direção x . Por substituição direta, podemos verificar facilmente que as soluções da Eq 26_7 e Eq 26_8 são, respectivamente, para uma onda que se propaga para a direita (+ x):

$$B_z = B_{0z} \text{sen}(kx - \omega t + \delta_B) \quad (Eq\ 26_9)$$

$$E_y = E_{0z} \text{sen}(kx - \omega t + \delta_E) \quad (Eq\ 26_10)$$

Sendo $\omega = kc$ a frequência angular da onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ o número de onda, e δ_E a constante de fase da onda. Na forma vetorial:

$$\vec{B} = B_z(x)k = B_{0z} \text{sen}(kx - \omega t + \delta_B)k \quad (\text{Eq 26}_{11})$$

$$\vec{E} = E_y(x)j = E_{0y} \text{sen}(kx - \omega t + \delta_E)j \quad (\text{Eq 26}_{12})$$

Note que \vec{B} e \vec{E} são ondas planas e transversais. Além disso, elas devem satisfazer as equações de Maxwell. Substituindo-as na Eq 26_4:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \leftrightarrow kE_{0y} \cos(kx - \omega t + \delta_E) = \omega B_{0z} \cos(kx - \omega t + \delta_B)$$

e, portanto:
$$\begin{cases} E_{0y} = \frac{\omega}{k} B_{0z} = cB & (\text{Eq 26}_{13}) \\ \delta_E = \delta_B & (\text{Eq 26}_{14}) \end{cases}$$

A Eq 26_13 relaciona as amplitudes das ondas \vec{B} e \vec{E} ; a Eq 26_14 nos diz que no vácuo elas viajem em fase. Dessas informações resultam o modelo de onda plana monocromática, esquematizada na Fig. 26-4:

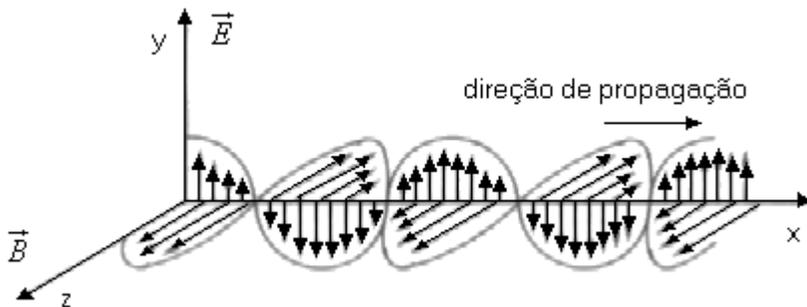


Fig 26.4

Fig. 26.4 : Modelo de onda plana monocromática. A direção do campo \vec{E} é, por convenção, a direção de polarização da onda EM.

ELETROMAGNETISMO

28 Aula : **ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS EM MEIOS MATERIAIS.**

- 27_1 Equações de Maxwell em Meios Materiais;
- 27_2 Ondas Eletromagnéticas em Meios materiais Lineares Não-Dissipativos;
- 27_2.1 Dielétricos Perfeitos (Lineares);
- 27_3 Ondas em meios Lineares Dissipativos.

28_1 EQUAÇÕES DE MAXWELL EM MEIOS MATERIAIS

Vimos que a presença de meios materiais as equações de Maxwell podem ser convenientemente reescritas para incluir efeito da polarização e da magnetização:

$$\begin{array}{ll}
 i) \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v & ii) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
 iii) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & iv) \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
 v) \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & vi) \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}
 \end{array}$$

Sendo \vec{P} o vetor polarização (definido como sendo a quantidade de dipolos elétricos da amostra por unidade de volume); \vec{M} é o vetor magnetização (momento de dipolos magnéticos por unidade de volume da amostra); \vec{D} é o vetor deslocamento e \vec{H} é o vetor auxiliar, também chamado de indução magnética. Para meios lineares, ainda podemos escrever:

$$\begin{array}{l}
 \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad \text{e, conseqüentemente, de } v) \quad \text{e } vi) : \\
 \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \epsilon = \text{permissividade do meio} \quad (Eq 27_1) \\
 \vec{B} = \mu \vec{H} \quad ; \quad \mu = \text{permeabilidade do meio} \quad (Eq 27_2)
 \end{array}$$

28_2 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM MEIOS MATERIAIS LINEARES NÃO-DISSIPATIVOS

28_2.1 Dielétricos Perfeitos (Lineares).

Consideramos inicialmente um dielétrico perfeito ($\sigma \rightarrow 0$) e inicialmente neutro. Nesse caso, usando as (Eq 27_1) e (Eq 27_8) as equações de Maxwell ficam ($\vec{J} = 0$):

$$\begin{array}{ll}
 i) \nabla \cdot \vec{E} = 0 & ii) \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\
 iii) \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & iv) \nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{array}$$

Note que essas equações só diferem daquelas para o vácuo porque agora aparecem μ, ϵ em vez de μ_0, ϵ_0 . Portanto, tomando o rotacional de ambas os lados de *iii*) e *iv*) e usando $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ para o arco de $\vec{A} = \vec{E}$ e $\vec{A} = \vec{B}$, respectivamente, teremos:

$$\text{Equações de Onda} \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} & (\text{Eq 27}_3) \\ \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} & (\text{Eq 27}_4) \end{cases}$$

e, portanto, podemos imediatamente concluir:

a) $\mathcal{G} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \equiv \frac{c}{n} \rightarrow$ velocidade da onda no dielétrico ;
 $c \rightarrow$ velocidade da luz no vácuo (máxima);
 $n \rightarrow$ índice de refração no meio;
 $n = c\sqrt{\mu\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$ (Eq 27_5)

b) As ondas \vec{E} e \vec{B} viajam em fase no meio, e sem distorção (perda de energia).

c) Para uma onda plana se propagando no sentido $+x$:

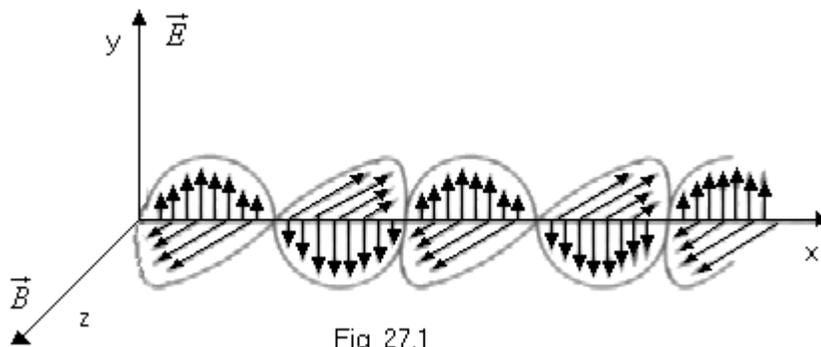
$$\vec{E} = E_0 y \text{ sen}(kx - \omega t + \delta) \quad (\text{Eq 27}_6)$$

$$\vec{B} = B_0 k \text{ sen}(kx - \omega t + \delta) \quad (\text{Eq 27}_7)$$

$$E_y = CB_z \quad (\text{Eq 27}_8)$$

$$\omega = \mathcal{G}k = 2\pi\nu \quad (\text{Eq 27}_9)$$

d) Esquemáticamente (Fig 27.1):



28_3 ONDAS EM MEIOS LINEARES DISSIPATIVOS

Para condutores, as cargas livres se movimentam facilmente, e como já vimos podem considerar $\rho_v = 0$, pois as cargas vão para a superfície num tempo extremamente curto. Entretanto, a densidade de corrente $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ não será nula, sendo o efeito de uma corrente superficial ou “pelicular” através do condutor. Substituindo $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ nas equações de Maxwell bem como as (Eq 27_1) e (Eq 27_2):

$$\begin{aligned}
 i) \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & ii) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
 iii) \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & iv) \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu\sigma \vec{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento de tomar o rotacional nas equações ii) e iv) e usar a identidade vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, teremos:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{Eq 27_10}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{Eq 27_10}$$

cujas as soluções são, para uma onda polarizada em x e se propagando no sentido $+z$:

$$\vec{E} = E_0 \hat{i} e^{-qz} \text{sen}(kx - \omega t + \delta) \tag{Eq 27_12}$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{j} e^{-qz} \text{sen}(kx - \omega t + \delta) \tag{Eq 27_13}$$

sendo:

$$q = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]}^{1/2} \tag{Eq 27_14}$$

$$k = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]}^{1/2} \tag{Eq 27_15}$$

$$\delta_E = \delta_B + \phi \quad ; \quad \phi = \tan^{-1} \frac{q}{k} \tag{Eq 27_16}$$

Note que agora as ondas são amortecidas por um fator exponencial e defasadas (fig. 27.2):



Fig 27.2

ELETROMAGNETISMO

28ª Aula : **O TEOREMA DE POYNTING.**

28_1 Conservação da Energia;

28_2 Vetor Poynting;

28_3 Valores Médios.

28_1 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA.

O teorema de Poynting (J. H. Poynting, 1884) relaciona a potência total que flui para dentro (ou para fora) de um certo volume com a potência dissipada dentro (ou fora) desse volume. Portanto, esse teorema expressa a conservação da energia. Para demonstrá-lo, vamos fazer uso da seguinte identidade vetorial

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) , \quad (Eq\ 28_1)$$

do teorema da divergência

$$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV , \quad (Eq\ 28_2)$$

e das equações de Maxwell

$$\begin{array}{ll} i) \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & ii) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ iii) \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & iv) \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}$$

$$\text{com } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} . \quad (Eq\ 28_3)$$

Tomando o produto escalar de *iii)* por \vec{H} e de *iv)* por \vec{E} :

$$\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{H} \quad (Eq\ 28_4)$$

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (Eq\ 28_5)$$

Subtraindo (Eq 28_4) de (Eq 28_5) e usando (Eq 28_3):

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \vec{J} - \epsilon \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (Eq\ 28_6)$$

Substituindo o lado esquerdo de (Eq 28_6) pela identidade (Eq 28_1) e reescrevendo o lado direito usando:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \times \vec{B}) = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \frac{\vec{B}}{\mu} + \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = 2\vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (Eq\ 28_7)$$

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (Eq\ 28_8)$$

Integrando em seu volume V e usando $\vec{E} \cdot \vec{E} = E^2$:

$$\oint_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = - \frac{d}{dt} \oint_V \frac{\epsilon B^2}{2\mu} + \frac{eE^2}{2} dV - \oint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$$

Substituindo $B = mH$ e usando o teorema da divergência (Eq 28_2) no lado esquerdo:

$$\oint_V \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \right) dV = - \frac{d}{dt} \oint_V \frac{\epsilon B^2}{2\mu} + \frac{eE^2}{2} dV - \oint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (Eq\ 28_9)$$

Esse é o teorema de Poynting. O lado esquerdo representa a energia total fluindo para um certo volume; a primeira integral do lado direito é a energia armazenada nos campos elétrico e magnético (W_{EM}); a segunda integral representa a energia dissipada por efeito joule (figura 28.1).

28_2 VETOR POYNTING

O teorema de Poynting, Eq.(28-9), nos diz que a taxa de energia que flui para um certo volume (1º termo) é igual à taxa com que a energia é dissipada pr efeito Joule dentro do volume mais a taxa com que é armazenada nos campos – Fig. 28.1.

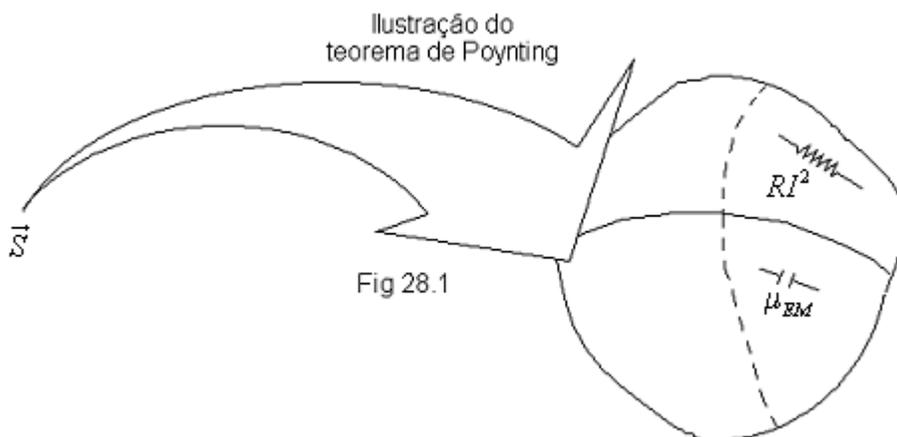


Fig. 28.1. Ilustração do teorema de Poynting, que expressa a conservação da energia.

A energia por unidade de tempo por

unidade de área transportada pelos campos \vec{E} e \vec{B} é chamada de **Vetor de Poynting S**:

$$\vec{S} = \frac{1}{m} \vec{E} \times \vec{B} \quad ; \quad [S] = \frac{Watt}{m^2} \quad (Eq\ 28_{10})$$

O sentido de \vec{S} é o sentido de propagação da energia, seu módulo é a potência por área, no caso de propagação de ondas eletromagnéticas, o sentido de \vec{S} é o sentido de propagação da onda.

A densidade de energia armazenada no campo eletromagnético é:

$$m_{EM} = m_E + m_B \quad , \quad [m_{EM}] = [m_E] = [m_B] = \frac{Joule}{m^3} \quad (Eq\ 28_{11})$$

$$m_{EM} = \frac{eE^2}{2} \quad ; \quad m_B = \frac{B^2}{2m} \quad (Eq\ 28_{12})$$

EX.01: Verifique o teorema de Poynting para um fio cilíndrico de raio b percorrido por uma corrente constante I . A Condutividade do fio é s e o seu comprimento é l (Fig.28-2).

Solução:

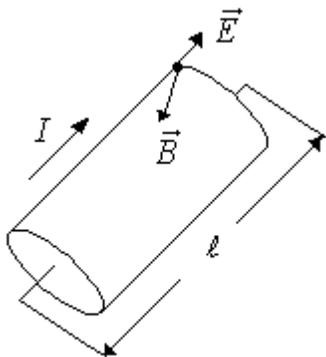


Fig.28.2 : Fio cilíndrico de comprimento l percorrido por uma corrente I .

Fig 28.2

Do teorema de Poynting, temos $\oint_A \vec{S} \times d\vec{A} = \frac{d}{dt} \int_V m_{EM} dV - \int_V \vec{E} \times \vec{J} dV$

Como os campos são estáticos (corrente constante), a taxa de variação de E e B , é nula. Além disso:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi \quad \text{é perpendicular a } \vec{E} \text{ em cada ponto.}$$

Da lei de Ohm na forma vetorial:

$$\vec{J} = s \vec{E} \quad \text{ou} \quad E = \frac{J}{s} = \frac{I}{\pi b^2 s} \quad . \text{ Substituindo no teorema de Poynting:}$$

$$\int_A \frac{E}{m_0} B dA = \frac{c}{m_0 p b^2} \frac{\partial \epsilon_0 I}{\partial t} (2pb) l = \frac{1}{s A} I^2 = RI^2 \quad (I)$$

que é perda por efeito Joule. Ainda:

$$\int_V \mathbf{E} \times \mathbf{J} dV = E J V = \frac{c}{p b^2 s} \frac{\partial \epsilon_0 I}{\partial t} \frac{\partial \epsilon_0 I}{\partial t} (p b^2) l = \frac{1}{s A} I^2 = RI^2 \quad (II)$$

como (I) = (II), c.q.v.

28_3 VALORES MÉDIOS

Em geral estaremos interessados no valores da energia, momento e pressão médios. Por exemplo, no caso da luz em que o comprimento de onda vale $l : 10^{-7} m$ e o período da onda vale $T : 10^{-7} s$ qualquer medida envolverá vários ciclos, não havendo muito sentido trabalhar com valores instantâneos. O valor médio de uma função é, por definição, a soma de todos os valores possíveis, dessa função num dado intervalo, dividido por esse intervalo, isto é, se $f = f(t)$, e T é o intervalo considerado, então:

$$\langle f \rangle = \bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (Eq 28_{13})$$

é o valor médio de f . No caso de uma função periódica, T é o período da função.

Especificamente para uma onda eletromagnética que se propaga no sentido $+x$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \mathbf{j} \text{sen}(kx - \omega t + d) \\ \mathbf{B} &= B_0 \mathbf{k} \text{sen}(kx - \omega t + d) \end{aligned} \quad (Eq 28_{14})$$

e, além disso, como $E = cB$ teremos, lembrando que $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$:

$$\mathbf{S} = \frac{cE_0^2}{m_0} \text{sen}^2(kx - \omega t + d) \mathbf{i} \quad (Eq 28_{15})$$

e, portanto, usando (Eq 28_13):

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{cE_0^2}{2m_0} \mathbf{i} = \frac{1}{2} e_0 E_0^2 \mathbf{i} \quad (Eq 28_{16})$$

O valor médio do módulo do vetor de Poynting é chamado de intensidade da onda eletromagnética, I :

$$I = \langle S \rangle = \frac{e_0}{2} E_0^2 \quad (Eq 28_{16})$$

ELETROMAGNETISMO

30ª Aula : **O VETOR DE POYNTING: ENERGIA, MOMENTO E PRESSÃO DA RADIAÇÃO.**

- 28_1 Densidade de Energia elétrica e Magnética e Vetor de Poynting;
- 28_2 Momento Linear e Vetor Poynting;
- 28_3 Valores Médios.

29_1 Densidade de Energia elétrica e Magnética e Vetor de Poynting;

Vimos na aula anterior que o vetor de Poynting \vec{S} relaciona a energia por área por tempo transportada para dentro de um volume com a potência dissipada e/ou armazenada dentro desse volume. No caso específico da radiação eletromagnética, vimos que

$$\vec{S} = \frac{1}{m_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad , \quad (\text{Eq } 29_1)$$

\hat{s} é o sentido da propagação de onda;

S é a energia/área/tempo transportada pela onda, ou em outras palavras, a potência por área. Vimos ainda que

$$m_{EM} = \frac{e_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2m_0} = m_E + m_B \quad (\text{Eq } 29_2)$$

é a densidade de energia armazenada nos campos elétrico e magnético. Partindo da (Eq 29_1) e usando as relações $E = cB$ e $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ não é difícil mostrar que $m_E = m_B$. Para mostrar isso, consideremos um paralelepípedo de lados infinitesimais, como mostrado na figura 2

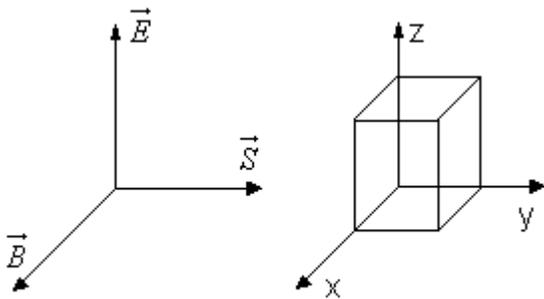


Fig. 9.1: O Fluxo do vetor S através da área da seção transversal $dx dz \mathbf{j}$ é a potência transmitida pela onda.

Fig 29.1

Da definição de Vetor de Poynting e da figura 9.1:

$$S = \frac{\text{energia (U)}}{\text{área} \cdot \text{tempo}} = \frac{dU}{dx dz dt} \quad \text{ou} \quad dU = S dx dz dt \quad (\text{Eq 29}_3)$$

Multiplicando e dividindo o lado direito por dy e observando que $\frac{dy}{dt} = c$, a velocidade da onda eletromagnética no vácuo,

$$dU = \frac{S}{c} dx dy dz \quad \text{ou} \quad \frac{dU}{dV} = \frac{S}{c} = m_{EM}, \quad (\text{Eq 29}_4)$$

em que m_{EM} é a densidade de energia do campo eletromagnético. Portanto:

$$m_{EM} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c} = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (\text{Eq 29}_5)$$

como antecipamos.

29_2 MOMENTO LINEAR E VETOR POYNTING

Ao atingir um condutor, o campo elétrico da onda eletromagnética (EM) estabelece uma corrente elétrica na direção do campo elétrico. Seja um condutor de dimensões infinitesimais, como mostrado na figura na figura 29.2:

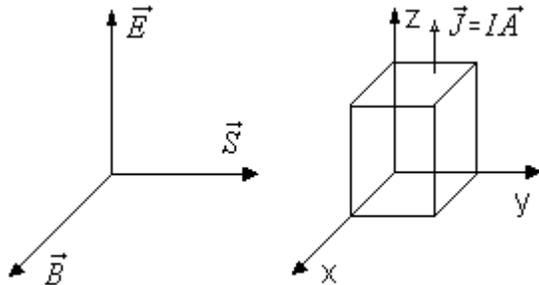


Fig 29.1

Fig. 29.2: A parte elétrica da onda EM dá origem a uma corrente e estabelece tensão entre as extremidades do condutor.

A potência dissipada pelo efeito Joule é

$$P = \frac{dU}{dt} = VI = EIdz \quad . \quad (\text{Eq 29}_6)$$

A força magnética sobre o condutor é:

$$F = |I \vec{\ell} \times \vec{B}| = |Idz B \hat{j}| = Idz \frac{E}{c} \quad . \quad (\text{Eq 29}_7)$$

Combinando (Eq 29_6) e (Eq 29_7), temos:

$$F = \frac{1}{c} \frac{dU}{dt} \quad . \quad (\text{Eq 29}_8)$$

Da lei de Newton $F = \frac{dp}{dt}$, e da equação acima, temos $dp = \frac{1}{c} dU$, ou, usando a Eq 29_4:

$$dp = \frac{1}{c^2} S dV$$

ou $\Delta p \cong \frac{S}{c^2} \Delta V$ (Eq 29_9)

Note que no caso de reflexão total da onda,

$$\Delta p = p_f - p_i = 2p \quad , \quad \text{pois} \quad p_f = p_i = p \quad (\text{Eq 29}_{10})$$

e no caso de absorção total, $p_f = 0$, de onde $\Delta p = p$, isto é, o momento, para um mesmo volume, é maior quando ocorre reflexão total.

29_3 PRESSÃO DA RADIAÇÃO E VETOR POYNTING

Da (Eq 29_7), vemos que a radiação exerce uma força no mesmo sentido de \vec{S} . Portanto, haverá uma pressão dada por:

$$p_r = \frac{F}{A} = \frac{1}{C} \frac{dv}{dt dz dx} = \frac{1}{C} \frac{dv}{dx dy dz} \frac{dy}{dz} \quad (\text{Eq 29}_{-11})$$

usando (Eq 29_4):

$$p_r = \frac{S}{C} \quad (\text{Eq 29}_{-12})$$

Note que no caso de reflexão total a variação do momento, e portanto a força, e conseqüentemente a pressão, para uma mesma área, é o dobro de quando ocorre absorção total:

$$p_r = \begin{cases} \frac{S}{C} & \text{Absorção Total} \\ \frac{2S}{C} & \text{Reflexão Total} \end{cases} \quad (\text{Eq 29}_{-13})$$

BIBLIOGRAFIA

- 1) R. M. Eisberg e L. S. Lerner, Física – Fundamentos e Aplicações, vol. 3 (e parte do vol.4), 1983, McGraw-Hill, Rio de Janeiro.
 - 2) H. D. Young e R. A. Freedman, Sears e Zemansky – Física III: Eletromagnetismo, 2004, Pearson Education, São Paulo.
 - 3) Curso de Física Básica, H. M. Nussenzveig, vol. 3, 4ª Edição, Editora Blucher Ltda. V-
 - 4) D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, Fundamentos de Física, vol. 3, 6a ed., 2003, LTC editora, Rio de Janeiro.
- HAYT JUNIOR, William Hart; BUCK, John A. Eletromagnetismo. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013. xviii, 595 p.
- RAMALHO JÚNIOR, Francisco; SANTOS, José Ivan Cardoso dos; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Antônio de Toledo. Os fundamentos da física. São Paulo: Moderna, 2006. 3 v.
- SADIKU, Matthew N. O. Elementos de eletromagnetismo. 5. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2012. xvi, 702 p.